



Almaty Physics Battles 2024
Условия задач
Старшая лига

Содержание

Первый раунд	3
Второй раунд	4
Третий раунд	6
Четвертый раунд	8
Шестой раунд	10
Седьмой раунд	13
Суперфинал I	16
Суперфинал II	19

Задача 1. Полужидкий цилиндр

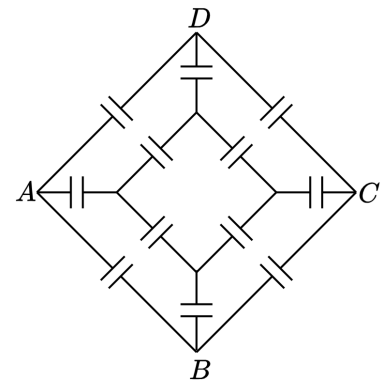
По наклонной плоскости под углом α к горизонту скатываются две одинаковые бочки. Задняя бочка массой M сплошная и однородная, а передняя состоит из тонкостенной оболочки массой $M/5$ и полностью заполненной внутри вязкой жидкостью массой $4M/5$. Каковы установившиеся ускорения цилиндров? Бочки гладкие, а плоскость достаточно шероховатая.

Задача 2. В глазах двоится

Ринат соединил два зеркала в угол так, что между ними образовался угол $(180/n)^\circ$. После этого, он поставил некий объект между зеркалами. Определите сколько отражений есть у объекта в зависимости от $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Проекционное электричество

Арсен взял некий трёхмерный геометрический объект и нарисовал его проекцию на двумерную плоскость. На проекции, он все рёбра заменил на конденсаторы ёмкостями C и получил фигуру, показанную на рисунке. Предположите, какой трёхмерный геометрический объект это мог быть, и найдите ёмкость цепи при подключении проводов к контактам AC .



Задача 4. Магниты

Частица массой $m = 50$ нг и зарядом $q = 3$ мкКл движется со скоростью $v = 10$ м/с под углом $\theta = 30^\circ$ к линиям однородного магнитного поля с индукцией $B = 0.5$ Тл. Найдите радиус спиральной траектории, период обращения частицы в магнитном поле и шаг спирали.

Задача 5. Бездельник

Бездельнику... нечего делать. Достав свой любимый сосуд с газом молярной массы μ , бездельник принялся ложечкой квазистатично класть на его поршень сверху песок с переменной скоростью наполнения массы αt^3 , где t — время от начала засыпания поршня песком, а α — коэффициент пропорциональности, измеряемый в $[\text{кг}/\text{сек}^4]$. Приняв во внимание, что температура тогда на улице была T_0 , а сосуд очень хорошо проводит теплоту, то начальная температура газа тоже была T_0 . Атмосферное давление p_0 , площадь подвижной части поршня S , а её масса m_0 . Определите зависимость плотности газа ρ от времени.

Задача 6. ...куда глаза глядят

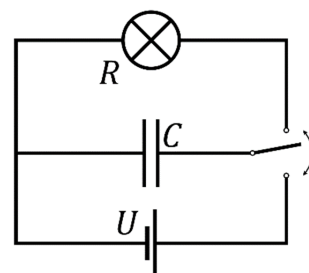
Рассчитайте, какую минимальную работу нужно совершить человеку массой $m = 70$ кг и длиной его ног $L = 70$ см для того, чтобы пройти 1 километр за $N = 1430$ шагов. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с².

Задача 1. Гидроабразивная резка

Тонкая струя воды, выпускаемой с высокой скоростью и под высоким давлением, имеет очень хорошие режущие свойства и потому используется в гидроабразивной резке. Струя воды сечением $S = 1 \text{ мм}^2$ выпускается вертикально вниз на ровную поверхность металла со скоростью $v_0 = 1000 \text{ м/с}$. С какой силой F давит вода на поверхность и какой её массовый расход Q ? Течение ламинарное, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

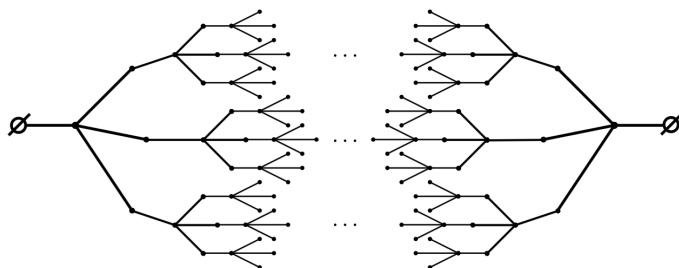
Задача 2. Электрические часы

Студент физического факультета нашёл в лаборатории конденсатор ёмкости $C = 100 \text{ мкФ}$, и с помощью него, ключа, лампы и источника неизвестного напряжения собрал схему, изображённую на рисунке справа. Лампа имеет сопротивление $R = 5 \text{ кОм}$ и горит только при напряжении на ней, большей $\Delta U = 5 \text{ В}$. Студент с помощью ключа периодически заряжает конденсатор и разряжает его через лампу, причём время зарядки конденсатора очень мало. Чему должно быть равно напряжение источника U , чтобы лампа горела ровно $\Delta t = 1 \text{ секунду}$?



Задача 3. Алмазный резистор

Дядя Сэм поручил Экспериментатору Глюку создать алмазный резистор из двух экземпляров бриллианта. Глюк, не успев толком объяснить, что алмазы проводить ток не способны, был отправлен в лабораторию для создания прототипа. Посидев и покумекав, он надумал создать два проводящих “алмаза” из резисторов, а настоящие бриллианты оставить себе. Сопротивления между всеми соседними узлами (включая клеммы на концах цепи) одинаковы и равны r . Сможете ли вы помочь ему найти сопротивление R подобной цепи?



Подсказка: ввиду большого количества связей в алмазе, можно считать, что Глюк использует бесконечное количество резисторов.

Задача 4. Остывание чайника

Физик Бекасыл очень любит пить чай. Однажды вскипятив алюминиевый чайник, он решил измерить время, за которое чайник остынет до необжигающей кожу температуры – $T_1 = 40^\circ\text{C}$. Измеренное время оказалось равным $t = 30 \text{ минут}$. Из уроков физики Бекасыл знал, что мощность теплоотдачи прямо пропорциональна разности температур нагретого тела и окружающей среды, а также площади поверхности тела: $P = \kappa \cdot S \cdot (T - T_0)$. Пользуясь измеренным временем, Бекасыл

решил вычислить коэффициент κ .

Для начала он решил определить теплоемкость системы. После остывания он измерил массу чайника $m_{\text{тр}} = 0.9$ кг и массу налитой воды $m_w = 0.7$ кг на весах. Воспользовавшись справочником по физике, Бекасыл узнал удельные теплоемкости алюминия $c_{\text{ал}} = 920$ Дж/(кг · К) и воды $c_w = 4200$ Дж/(кг · К).

1. Чему равна полученная Бекасылом теплоемкость C ?

Следующим шагом Бекасыл решил найти площадь поверхности чайника. Чайник имел форму, напоминающую полусферу. Как истинный физик Бекасыл аппроксимировал форму чайника до полусферы радиусом $R = 10$ см.



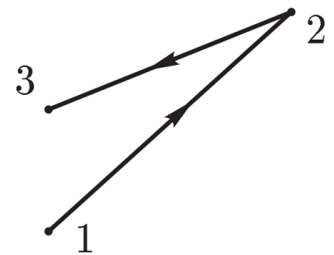
2. Чему равна площадь поверхности чайника S ?

Бекасыл измерил термометром комнатную температуру $T_0 = 25^\circ\text{C}$. Температура кипения воды $T_b = 100^\circ\text{C}$ ему известна. Физическая интуиция Бекасыла подсказала ему, что температуру воздуха в кухне можно считать постоянной ввиду ее больших размеров, а чайник отдает тепло с поверхности равномерно.

3. Чему равен коэффициент κ ?

Задача 5. Секретная рукопись

Однажды ночью Максвелл как-то пробрался в лабораторию Больцмана и нашел рукопись, на которой был изображён процесс $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, совершённый над одним молем гелия (одноатомный газ). С течением времени чернила выцвели, и стало невозможно разглядеть, где находятся оси p (давления) и V (объёма). Однако из текста рукописи следовало, что состояния 1 и 3 лежат на одной изохоре, а также то, что в процессах $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ объём газа изменяется на ΔV . Кроме того, было сказано, что количество теплоты, подведённой в процессе $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ к гелию, равно нулю. Определите, на каком расстоянии (в единицах объёма) от оси p (давлений) находится изохора, проходящая через точки 1 и 3.



Задача 6. Град

Дождевые капли диаметром $d_0 = 0.5$ мм падают на землю со скоростью $v_0 = 2$ м/с. Оцените скорость падения льдинок шарообразной формы диаметром $d = 5$ см во время града. Плотность льда составляет 90% от плотности воды; сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

Время на прорешку — 30 минут (14:30–15:00);

Капитанский раунд — 5 минут (14:55–15:00);

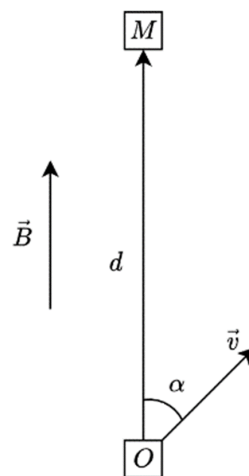
Рекомендуемое время на раунд — 10 минут;

Верхний предел на раунд — 15 минут;

Конец тура — 16:30 (GMT+5);

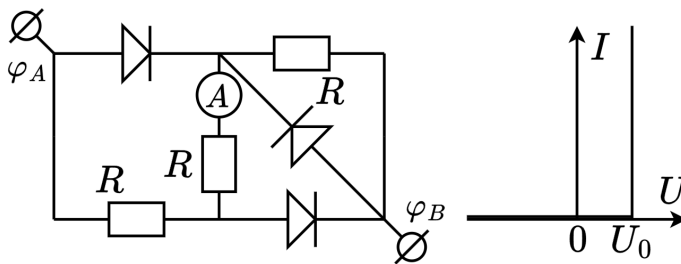
Задача 1. Магнитное прицеливание

Пучок электронов зарядом $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг разгоняется разностью потенциалов U и входит из точки O в область магнитного поля индукцией $B = 1.2$ Тл. Направление магнитного поля составляет с первоначальным направлением электронов угол $\alpha = 30^\circ$. Вдоль направления магнитного поля на расстоянии $d = 1$ м от точки O расположен приёмник электронов M . При каких значениях напряжения U электроны могут попасть в приёмник? При каком максимально возможном напряжении $U_{\max}$ это ещё возможно?



Задача 2. Диодная путаница

На рисунке справа показана электрическая схема из трёх одинаковых резисторов с известным сопротивлением R , а также трёх неидеальных диодов, в вольт-амперной характеристике которых величина открывающего напряжения U_0 известна. Найдите зависимость силы тока I_A на амперметре от разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ на клеммах в широком интервале напряжений и нарисуйте график, указав значения всех особых точек.



Задача 3. Каракули

Дияр зашёл в кабинет физики и увидел надпись “APhV” на маркерной доске, а также лежащую на столе собирающую линзу. Он взял линзу в руки, вытянул её вперёд, встал на расстояние L от маркерной доски, и начал рассматривать надпись сквозь линзу, меняя как расстояние d между своими глазами и линзой, так и расстояние L . Дияр обратил внимание, что если он будет стоять не дальше $L_{\max} = 50$ см от маркерной доски, тогда надпись “APhV” не будет переворачиваться, как бы он ни двигал линзу рукой. Какое фокусное расстояние F имела линза? Полагайте, что глаза Дияра, линза, и надпись всегда находятся на одной линии.

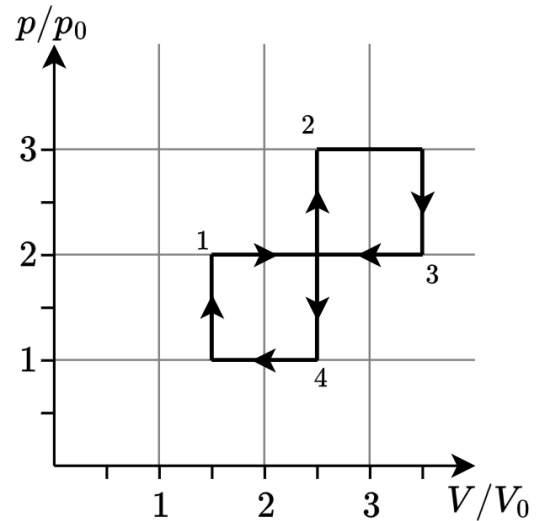
Задача 4. Снежная слепота

В снежный и солнечный день физик решил пойти в поход, но забыл свои снежные очки и солнечный крем. Что делает ситуацию хуже, по маршруту похода он должен идти прямо по направлению солнца. Чтобы минимизировать вредный эффект солнца, он решил совершить свой путь наклонив голову вниз и смотря под ноги. Оцените, во сколько раз он улучшил свою ситуацию. Высота Солнца равна 45° .

Примечание: эффект от солнца зависит от интенсивности света, попадающего в глаза физика.

Задача 5. Бесконечный процесс

Антон проводит изображённый на рисунке справа процесс **1–2–3–4–1** над идеальным одноатомным газом. Найдите КПД процесса.



Задача 6. Удача барона

Барон Мюнхгаузен известен как чрезвычайно умелый и удачливый канонер. Как-то раз, завистники решили надуть его. Они дали ему пушку и попросили поразить вишневую косточку. Пушка и вишневая косточка находятся на расстоянии $L = 1$ км друг от друга на одной горизонтальной плоскости.

Мюнхгаузен направил пушку так, что ядро, выпущенное со скоростью $v = 150$ м/с и летящее параболически, ударило бы мишень. Однако, завистники соврали ему. Ядро вылетело на самом деле со скоростью чуть большей, чем $v = 150$ м/с, и если бы оно летело параболически, оно перелетело бы мишень. К счастью, в наивысшей точке своей траектории ядро столкнулось с голубем. Столкновение с птицей замедлило ядро как раз настолько, что оно поразило мишень.

Допустим, что столкновение ядра с птицей абсолютно неупругое. Сопротивлением воздуха пренебречь. Считая массу голубя равной $m = 500$ г и массу ядра $M = 1$ кг, определите изначальную скорость ядра. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Время на прорешку — 45 минут (10:00–10:45);

Капитанский раунд — 5 минут (10:40–10:45);

Рекомендуемое время на раунд — 15 минут;

Верхний предел на раунд — 20 минут;

Конец тура — 12:30 (GMT+5);

Задача 1. Американская горка

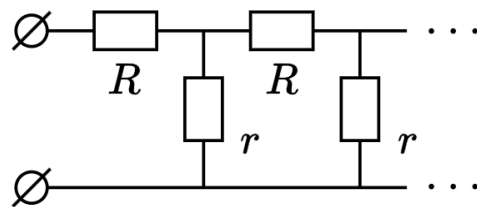
Американская горка описывается функцией высоты $H(x) = h \cos(\alpha x) + h_0$, где α имеет размерность м^{-1} . В точке $x = 0$ тележка имеет нулевую скорость. Найдите максимальную перегрузку (в единицах g), не учитывая гравитационную силу (то есть в состоянии покоя перегрузка = 0).

Математическая подсказка: Радиус кривизны функции $f(x)$ определяется как

$$R = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}{|f''(x)|}.$$

Задача 2. Электрическая цепь

Бесконечная цепочка имеет одинаковые звенья, состоящих из резисторов сопротивлениями r и R , соединённых, как показано на рисунке. Подаваемое между клеммами напряжение U_0 .



1. Найдите общее сопротивление цепи.
2. Выведите зависимость напряжений между i и $i + 1$ -ым звеньями в бесконечной цепи.
3. Определите тепловую мощность, возникающей в N -ном звене.

Задача 3. Стержень и бусинка

На гладкой поверхности стоит однородный стержень длины L и массы M . К стержню прикреплена бусинка массы m . В какой-то момент по бусинке производят удар, после которого система получает горизонтальную скорость V_0 и начинает падать. Время падения равно t . Найдите горизонтальное смещение стержня и бусинки относительно начального положения. Смещением системы за время удара пренебречь. Трение отсутствует.

Задача 4. Stone Ocean

В аквариум, изначально содержащий только некоторое количество воды плотности $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, начали по одному класть одинаковые камни объёмом $V = 4 \text{ дм}^3$, и после каждого нового камня измеряли изменение средней плотности содержимого аквариума $\Delta\rho_{\text{av}}$ относительно предыдущего состояния. Получившаяся таблица оказалась следующей:

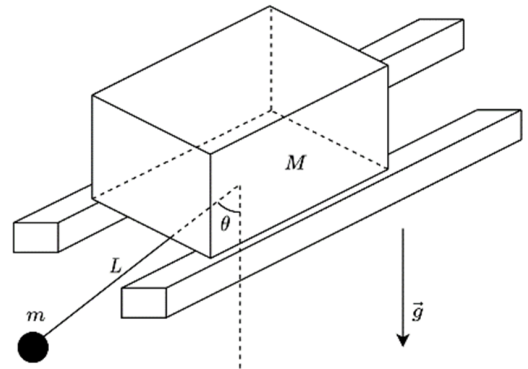
Кол-во камней, N	1	2	3	4	5
$\Delta\rho_{\text{av}}$, кг/м^3	100	80	90	90	90

Определите плотность камня ρ , начальный объём воды V_0 и полную вместимость аквариума V_1 . Известно, что $V_0 < V_1$, а вода изначально не содержала никаких

примесей и прочих объектов. Имейте в виду, что измеряется средняя плотность содержимого аквариума (окружающий воздух им не является), а не всего его объёма.

Задача 5. Проскальзывание

На рисунке справа брусок массы M расположен на двух параллельных рельсах, коэффициент трения его с которыми равен $\mu = 0.2$. Под бруском подвешен на нити длины $L = 30$ см грузик массой $m = 0.2M$, который совершает колебания в плоскости, параллельной рельсам. Грузик приподняли от вертикального положения на угол $\theta_0 = 90^\circ$, а затем отпустили. При каком положении груза, описываемое углом θ , брусок начнёт проскальзывать вдоль рельсов? При каком минимальном коэффициенте трения брусок не будет проскальзывать?



Задача 6. Миш, включи кондиционер!

Во время жары с температурой на улице 25°C , Маша и Медведь установили новый идеальный кондиционер в своей спальне, чтобы как-то охладиться. Спустя несколько дней температура воздуха на улице поднялась до 30°C . Во сколько раз увеличилась производительность энергии, необходимой для поддержания комнатной температуры на уровне 20 градусов?

Время на прорешку — 45 минут (14:30–15:15);

Капитанский раунд — 5 минут (15:10–15:15);

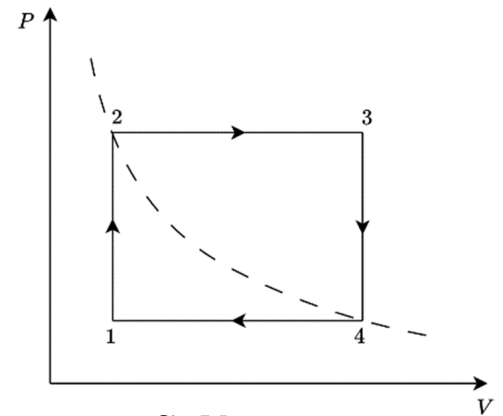
Рекомендуемое время на раунд — 15 минут;

Верхний предел на раунд — 20 минут;

Конец тура — 17:00 (GMT+5);

Задача 1. Кипение воды

На рисунке справа изображена PV -диаграмма давления от объёма $\nu = 100$ молей одноатомного идеального газа, состоящая из двух изохор 1-2 и 3-4, и двух изобар 2-3 и 4-1. Известно, что в точках 1 и 3 температуры газа составляют $T_1 = 400$ К и $T_3 = 900$ К соответственно, а точки 2 и 4 лежат на одной изотерме с температурой T . Определите температуру T и найдите КПД η такого цикла.



В данном цикле газ отдаёт теплоту холодильному веществу, чем служит $m = 100$ кг воды, кипящей при 100°C . Удельная теплота парообразования воды $L = 2.26$ МДж/кг. Через сколько циклов N можно испарить всю воду?

Задача 2. Странная ракета

Ракета вращается по круговой орбите радиуса r_0 вокруг звезды массы M . Двигатель ракеты может одним мощным, мгновенным залпом изменить вектор скорости ракеты на $\Delta\vec{v}$. Направление залпа составляет угол θ с вектором скорости ракеты $\vec{v}$. Чтобы минимизировать потери топлива в N количестве залпов, нужно минимизировать величину $\Delta V = \sum_{i=1}^N |\Delta\vec{v}_i|$. Здесь ΔV является полным изменением модуля скорости ракеты. Считайте, что после одного залпа вектор скорости ракеты меняется мгновенно.



1. Допустим, ракета должна покинуть звезду (из изначальной круговой орбиты). Каким должно быть минимальное изменение модуля скорости, если двигатель ракеты способен произвести только один залп? В каком направлении должен быть произведен этот залп?
2. Теперь, ракета должна перейти на круговую орбиту радиуса $r_1 > r_0$ из изначальной орбиты радиуса r_0 . Каково минимальное изменение скорости ракеты, если двигатель ракеты совершает несколько залпов?

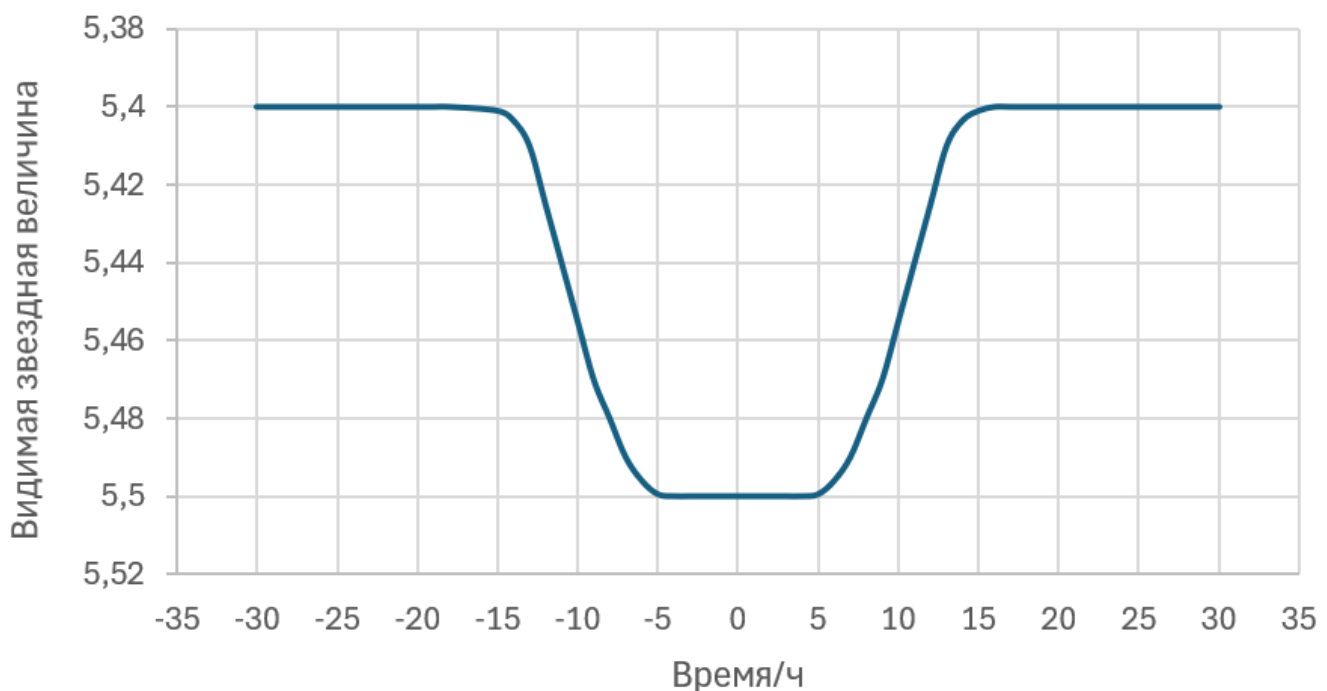
Задача 3. Мечник “Нурбол”

В древности существовал один легендарный и непобедимый мечник своего времени “Нурбол”. Он обладал огромной выносливостью и силой хвата. В его силе и технике рубящего удара скрывался секрет, которую мы сейчас вам и раскроем. Оказывается, “Нурбол” в молодости был довольно неплохим физиком: он вычислил расстояние x от кисти человека до места соприкосновения удара, при котором напряжение на его руки были минимальными (приблизительно равно нулю). Это вычисление помогло ему одержать победу во многих битвах. Давайте рассмотрим упрощённую модель меча в виде однородной прямоугольной палки длиной L . Чему равен x ?

Задача 4. Алголь

Алголь - звездная система типа Алголь в созвездии Персей. Главной особенностью такой системы является переменность видимого блеска вследствие затмения одной звезды его парой. Будем считать, что Алголь является двойной звездой, компоненты А и В которого имеют массы $M_A = 1.76M_\odot$, $M_B = 0.7M_\odot$ и радиусы R_A и R_B ($R_A < R_B$) соответственно. Сбоку указан график зависимости видимой звездной величины системы от времени во время затмения компоненты В компонентой А. Звездная величина m связывается освещенностью F как $m_1 - m_2 = -2.5 \log(F_1/F_2)$ (Чем ярче звезда, тем меньше у него звездная величина). Найдите радиусы звезд в радиусах Солнца, а также температуру компоненты А. Температура компоненты В – $T_B = 4500$ К, считайте что орбита системы является круговой и расстояние между звездами 2 а.е., плоскость орбиты лежит в плоскости наблюдения.

Справочные данные: $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, 1 а.е. = $1.5 \cdot 10^{11}$ м, $R_\odot = 7.0 \cdot 10^8$ м.



Задача 5. И вы это называете переменным током?

К цепи подключили последовательно конденсатор ёмкости C , катушку индуктивностью L , и генератор переменного напряжения $U(t) = U_0 \cos^3 \omega t$. Известно, что $\omega^2 LC = 1/12$. Каково максимальное значение заряда на конденсаторе в установившемся режиме?

Задача 6. Труба в зазеркалье

На плоском проводнике вертикально стоит заряженная тонкая труба с длиной $s = 4nL$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$) и радиусом a . Конец трубы покрыт диэлектриком, так что заряды не протекают в проводник. Поверхностная плотность зарядов на трубе распределена по закону $\sigma = \sigma_a \sin(\pi x/2L)$, где x отсчитывается от конца трубы, а σ_a постоянна.

1. Найдите электрическое поле в центре трубы на расстоянии $x = L$.

Теперь σ_a не постоянна и меняется со временем по следующему закону: $\sigma_a = \sigma_0 \cos(\omega t)$.

2. Найдите магнитное поле внутри трубы на расстоянии $x = L$.

Время на прорешку — 60 минут (15:30–16:30);

Капитанский раунд — 5 минут (16:20–16:30);

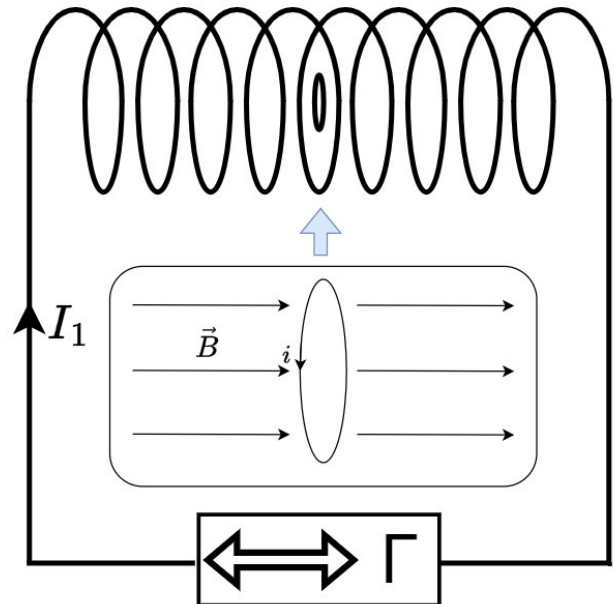
Рекомендуемое время на раунд — 15 минут;

Верхний предел на раунд — 20 минут;

Конец тура — 18:30 (GMT+5);

Задача 1. Внезапный поворот

Небольшое круглое кольцо площади S и массой m , по которому течет постоянный ток i , было помещено в соленоид длины L с N витками. Экспериментатор использует необычный генератор Γ для поддержки постоянного тока I_1 на соленоиде, который также может менять направление и значение постоянного тока на I_2 по щелчку ключа. Изначальное положение кольца с током указана на рисунке. Экспериментатор придал кольцу небольшой толчок и хочет найти положение переключения генератора с минимальным углом θ к оси Ox , при котором кольцо сможет совершить полный оборот. Сможете ли вы помочь ему решить данную задачу?



Задача 2. SpaceX Dragon

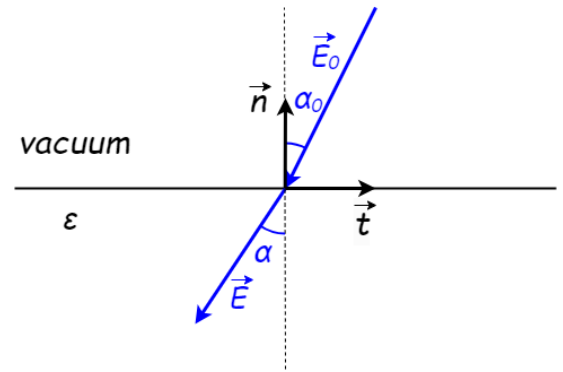
Космический корабль SpaceX Dragon возвращается на Землю после выполнения миссии. При входе в атмосферу его внешняя поверхность подвергается интенсивному нагреву. Для защиты от высоких температур используется двухслойная тепловая защита. Внешний слой тепловой защиты состоит из материала PICA-X (Phenolic Impregnated Carbon Ablator-X), который имеет толщину $d_{\text{PICA-X}} = 0.05$ м и теплопроводность $\lambda_{\text{PICA-X}} = 0.1$ Вт/(м · К). Внутренний слой выполнен из аэрогеля, толщина которого составляет $d_{\text{aerogel}} = 0.03$ м, а теплопроводность зависит от температуры и выражается формулой

$$\lambda_{\text{aerogel}}(T) = \lambda_0 (1 + \alpha(T - T_{\text{ref}})),$$

где $\lambda_0 = 0.02$ Вт/(м · К), $\alpha = 0.001$ К⁻¹, $T_{\text{ref}} = 300$ К. Температура на внешней поверхности ракеты при входе в атмосферу составляет $T_{\text{ext}} = 1200^\circ\text{C}$, а температура внутри ракеты поддерживается на уровне $T_{\text{int}} = 25^\circ\text{C}$. Площадь боковой поверхности теплозащитного покрытия ракеты составляет $S = 94.3$ м². Считать, что теплообмен проходит только через боковую поверхность ракеты; диаметр ракеты $D \gg d_{\text{PICA-X}}$. Определите температуру на границе между внешним слоем PICA-X и внутренним слоем аэрогеля, T_{mid} , при условии стационарного теплового потока.

Задача 3. Максвелловские натяжения и давления

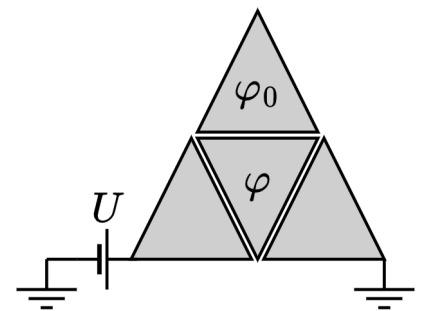
Электромагнитное поле создаёт тензор электромагнитных напряжений (натяжений или давлений). Электрическое поле, направленное параллельно некоторой поверхности давит на нее поверхностной силой, равной объемной плотности энергии этого поля. Электрическое поле, направленное перпендикулярно поверхности, тянет ее с такой же поверхностной силой.



Имеется граница раздела вакуума и среды с диэлектрической проницаемостью ϵ . Около границы раздела имеется электрическое поле. В вакууме оно равно E_0 и направлено под углом α_0 к нормали. На рисунке укажите две составляющие этой силы: $\vec{f}_0$, обусловленную только полем в вакууме, и $\vec{f}$, обусловленную только полем во второй среде. Найдите их модули. Найдите нормальную F_n и тангенциальную F_t составляющие поверхностной силы, действующей на границу раздела.

Задача 4. Треугольные проводники

Между собранными в треугольник четырьмя бесконечно длинными проводниками с основаниями в виде правильных треугольников есть малые воздушные промежутки. Изначально проводники не были заряжены, но затем один подключили к напряжению U , а второй заземлили, как показано на рисунке. Определите значения потенциалов φ_0 и φ верхнего и центрального проводников соответственно.



Задача 5. Идеальный “бокал”

Из полого шара радиусом R высекли горизонтально сегмент высотой h , и обе получившиеся части поменяли местами, спаяв точки касания двух сегментов — таким образом получается бокал. Найдите положение его центра масс.

Задача 6. Бенд на гитаре

Для украшения своей игры гитаристы часто используют «подтяжки», они же «бенды». Подтягивая струну вверх или вниз можно изменить звучание струны.

Дана горизонтальная струна, натянутая так, что ее удлинение составляет $\alpha = 7.2 \cdot 10^{-3}$ от ее длины. Главная частота колебаний струны $\nu_0 = 660$ Гц (обычно это соответствует зажатию на 12-ом ладу стандартно настроенной гитары).



Найдите частоту ν звучания струны, если один из ее концов подтянуть вверх на маленькое расстояние, равное $\eta = 6 \cdot 10^{-2}$ изначальной длины струны. Можете считать, что струна подчиняется закону Гука, а площадь ее поперечного сечения остается постоянной. Скорость распространения возмущений в струне равна

$$c = \sqrt{\frac{T}{\delta}},$$

где T – сила натяжения в струне, δ – линейная плотность струны. Можете пользоваться приближением $(1 + z)^n \approx 1 + nx$ для $z \ll 1$.

Время на прорешку — 60 минут (10:00–11:00);

Капитанский раунд — 5 минут (10:50–11:00);

Рекомендуемое время на раунд — 20 минут;

Верхний предел на раунд — 25 минут;

Конец тура — 13:30 (GMT+5);

Задача 1. Стержень в воде

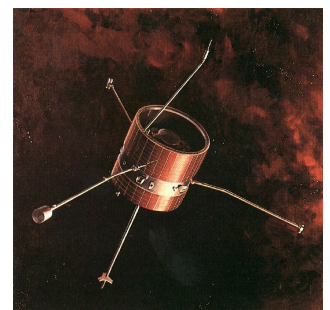
В большой водоём, где плотность воды ρ_0 , имеющий постоянную глубину h , начинают погружать подвешенный своим концом к вертикальному динамометру однородный стержень длины L , плотности ρ , и пренебрежимо малым поперечным сечением. В начале показание динамометра F_0 . Пусть по мере погружения стержня в воду отсчитывают высоту x , на который опускается верхний конец стержня (относительно того уровня, когда нижний конец едва ли касался поверхности воды), к которому прикреплён динамометр. Укажите точную зависимость $F(x)$ на каждом этапе погружения стержня, и нарисуйте качественные графики, с указанием значений особых точек, при различных параметрах системы.

Задача 2. Геоид

Полярный радиус Земли $R_p = 6357$ км, и по мере продвижения к экватору это значение увеличивается из-за суточного вращения. Рассчитайте зависимость высоты h над Северным полюсом от широты θ в рассматриваемой точке (экватор на 0° ; Северный полюс на 90°), и численно рассчитайте максимальное её значение. На поверхности Земли $g = 9.8$ м/с²

Задача 3. Pioneer 6

Pioneer 6 – запущенный на гелиоцентрическую орбиту с перигелием $r_{\min} = 0.814$ а.е. и апогелием $r_{\max} = 0.985$ а.е. в 1965 году и до сих действующий космический аппарат, который обращается вокруг Солнца за $T = 311.3$ дня. Основной модуль Пионера имеет диаметр $d = 0.94$ м и высоту $h = 0.81$ м. Рассчитайте, сколько джоулей энергии за один период обращения принимают солнечные панели Пионера, практически полностью покрывающие его боковую поверхность. Когда Солнце в зените над поверхностью Земли (радиус орбиты которой $r_E = 1$ а.е. $= 1.5 \cdot 10^{11}$ м), то мощность излучения на единицу поверхности равна $W_0 = 1400$ Вт/м². Считайте, что ось Пионера всегда перпендикулярна плоскости его орбиты; эффект Доплера не учитывать.

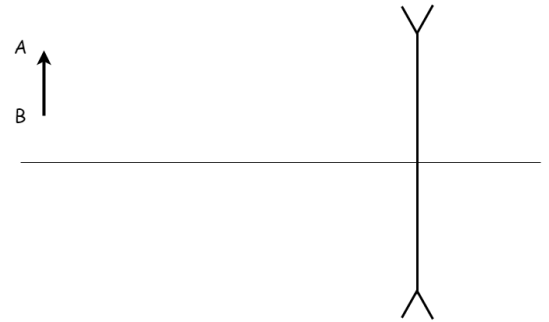


Задача 4. Хроматическая аберрация

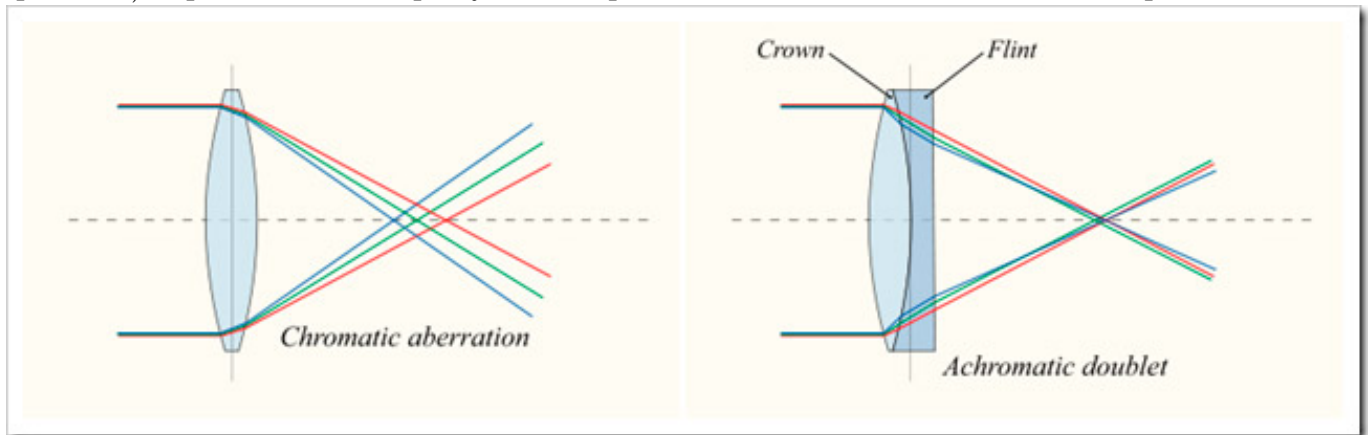
Люди, носящие очки часто могут заметить, что при взгляде на некоторые объекты (например, белые лампы) по краям этих объектов создаются цветные контуры: с одной стороны красный контур, с другой - синий. Хроматическая аберрация - это искажение изображения из-за зависимости показателя преломления линзы или объектива от длины волны падающего света.



1. Дана двояковогнутая линза с радиусами поверхностей $R_1 = 0.75$ м и $R_2 = 1.50$ м. Даны также координаты (в метрах) точек А(-1; 0.4), В(-1; 0.2). Показатели преломления для красного и синего света равны $n_R = 1.51$ и $n_B = 1.53$ соответственно. На одном рисунке постройте изображения предмета АВ для красного и синего света. Найдите координаты точек А и В относительно центра линзы для обоих цветов. Запишите усредненные координаты точек А и В. Найдите толщины красного и синего контуров.



Хроматической аберрацией устраняется путем совмещения двух линз (кроны и флинта) с различными фокусными расстояниями и показателями преломления.



Так как показатель преломления в зависимости от длины волны меняется мало, справедлива формула

$$\frac{\delta F}{F} = -\frac{\delta n}{n - 1} = \frac{1}{\nu},$$

где $\delta n = n_C - n_F$ - разность показателей преломления для двух длин волн $\lambda_C = 656.3$ нм и $\lambda_F = 486.1$ нм, лежащих по разные стороны зеленой области спектра (к ней наиболее чувствителен человеческий глаз); n - средний показатель преломления данного материала; δF - разность фокусных расстояний для этих длин волн; $\nu = (n - 1)/(n_F - n_C)$ - показатель дисперсии, является табличной величиной и зависит от материала.

2. Чтобы скорректировать зрение пациента нужны очки силой $D = -3.00$ дптр. Необходимо спроектировать линзу, не подверженную хроматической аберрации,

из двух линз: одна сделана из стекла K14 ($\nu_1 = 60.6$), вторая из стекла Ф8 ($\nu_2 = 35.6$). Найдите оптические силы этих линз D_1 и D_2 .

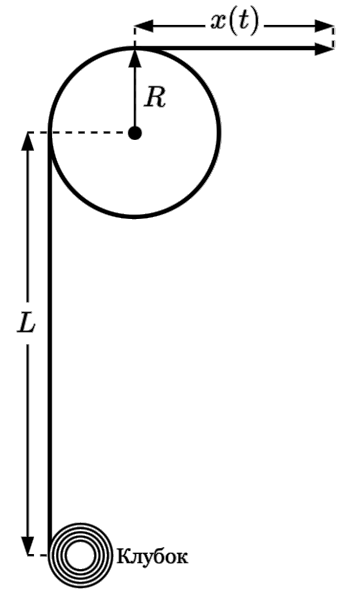
Задача 5. Интересная верёвка

Система состоит из фиксированного и гладкого блока радиуса R и неподвижного клубка, состоящего из массивной и однородной веревки очень длинной длины. Система изображена на рисунке и находится в горизонтальной плоскости. Расстояние между блоком и клубком равна L . Конец веревки тянут таким образом, что зависимость пройденного расстояния от времени имеет вид

$$x(t) = A \exp(\alpha t) - A.$$

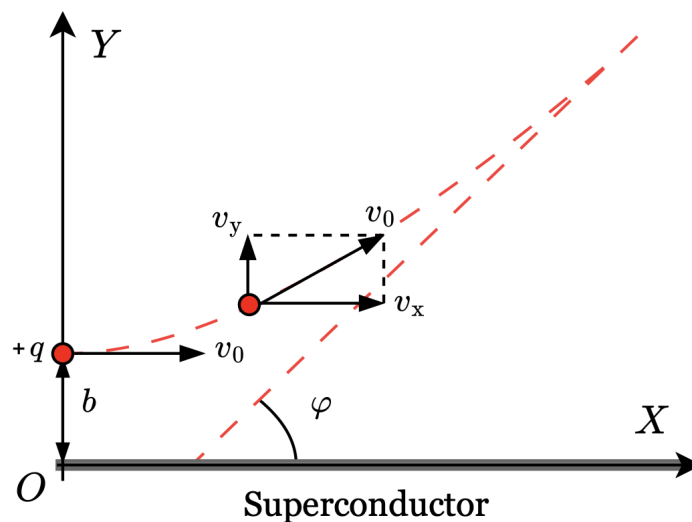
Считайте, что $R \ll L$ и $\alpha > 0$.

1. Через какое время веревка оторвется от блока?
2. Какое расстояние пройдет конец веревки в момент отрыва от блока?



Задача 6. Движение заряда над сверхпроводящей плоскостью

Заряд q с массой m в начале находится над сверхпроводящей плоскостью на расстоянии b от нее. Заряду сообщают начальную скорость v_0 , направленную параллельно плоскости. Найдите на какой угол φ отклонится заряд на бесконечности. В рамках этой задачи электростатическую силу не учитывайте.



Время на прорешку — 180 минут (10:00–13:00);

Капитанский раунд — 15 минут (13:40–13:55);

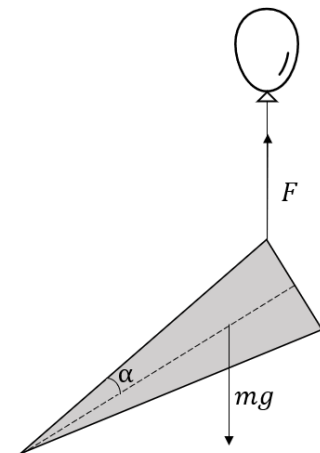
Рекомендуемое время на раунд — ∞ минут;

Верхний предел на раунд — ∞ минут;

Конец тура — 16:40 (GMT+5) (optional);

Задача 1. Колебания с шариком

Шарик, натягивающий нить с постоянной силой F привязали к концу равнобедренного треугольника массой m , углом полураствора α и высотой h . Найдите период колебаний этой системы. В каких пределах может быть F , чтобы колебания были возможны?



Задача 2. Сопрано

Оценить, на какое расстояние распространяется звук частотой 1100 Гц в помещении при атмосферном давлении и комнатной температуре. Считать что затухание звука обусловлено только теплопроводностью, а его распространение однородно. Теплопроводность в воздухе при $T = 293$ К равна $\kappa = 0.0259$ Вт/(м · К).

Задача 3. Wiggle, wiggle, wiggle

Металлическую линейку в форме параллелепипеда размерами $L \times a \times b$ ($L \gg a \gg b$) поставили вертикально так, что нижний её конец закреплён. Верхнему концу линейки дали небольшой толчок горизонтально и перпендикулярно её ширине a . Найдите циклическую частоту ω малых колебаний линейки. Модуль Юнга E и плотность материала линейки ρ заданы.

Задача 4. Космическая пушка СОИ

В рамках американской программы СОИ (Стратегическая оборонная инициатива, также известная как "Звёздные войны") рассматривалась космическая пушка, представляющая собой короткий и широкий соленоид, в центр которого помещают небольшие сверхпроводящие шарики, выталкиваемые полем вдоль его оси. Так как длина соленоида намного меньше его радиуса R , вы можете рассматривать соленоид как кольцо. Считайте зависимость магнитной индукции соленоида как функцию координаты z , отсчитываемой вдоль оси соленоида до его центра известной и равной

$$B_z = \frac{B_0 R^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

где $B_0 = 1$ Тл, а $R = 0.5$ м. Оцените максимальное ускорение шарика плотностью $\rho = 1000$ кг/м³ в процессе разгона. Найдите также максимальную скорость, которую достигнет шарик. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

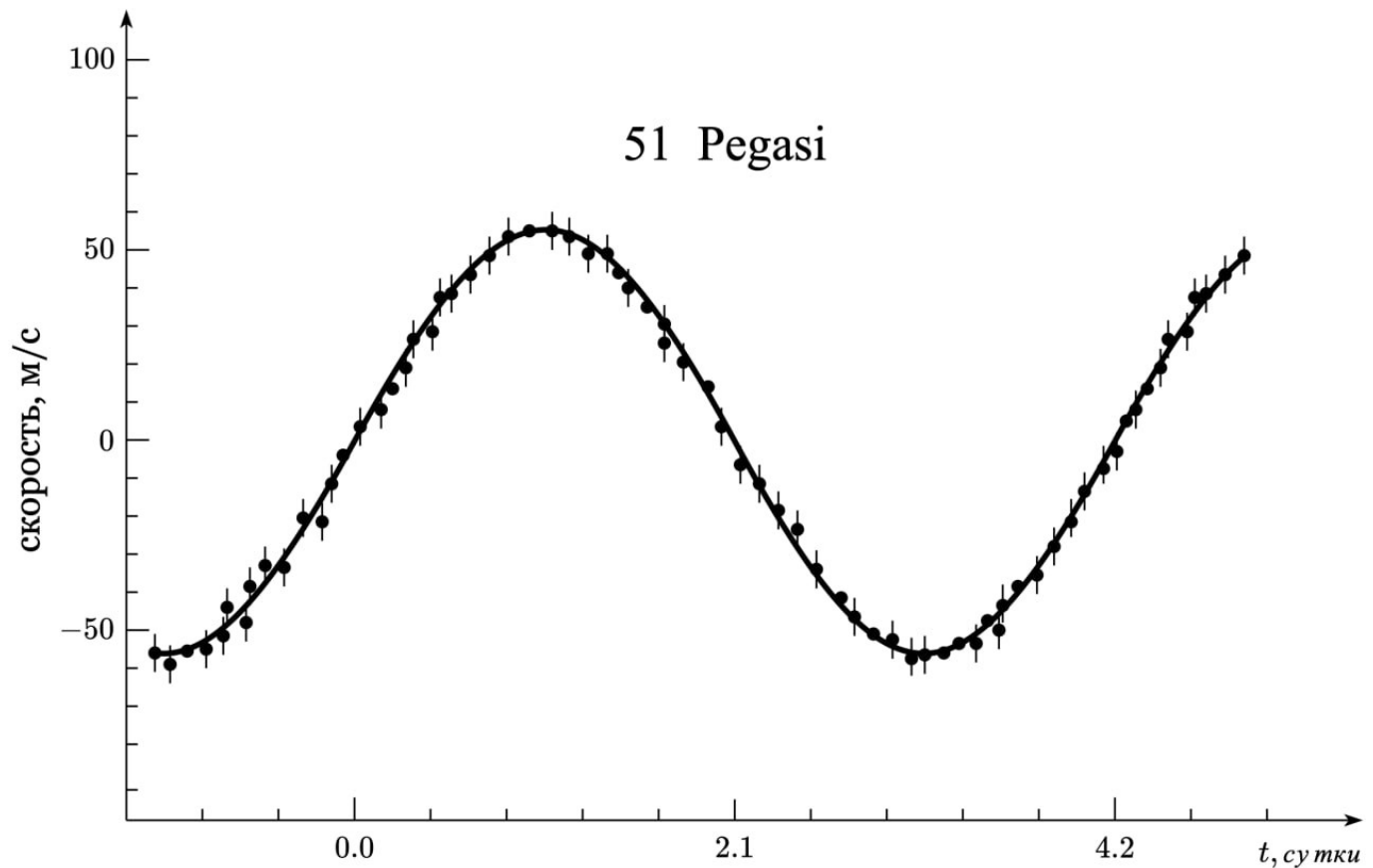
Подсказка: Так как поле не входит в сверхпроводящий шар, то суммарная нормальная проекция магнитного поля на границе шара должна равняться нулю. Чтобы выполнялось это условие, вы можете представить, что в центре шарика появляется магнитный диполь.

Формула магнитной индукции для магнитного диполя:

$$\vec{B}_m = \frac{3\mu_0(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{4\pi r^5} - \frac{\mu_0\vec{p}_m}{4\pi r^3}.$$

Задача 5. Звезда 51

Звезда 51 в созвездии Пегас практически является двойником нашего Солнца. Изучение ее оптических спектров показало регулярное изменение скорости звезды по закону $u = u_0 \sin(2\pi t/T)$ (сплошная линия как показано на рисунке). Предполагается, что эти временные вариации излучения обусловлены вращением вокруг нее намного более легкой планеты. По какой траектории движется планета и какова должна быть ее масса? Считайте, что наблюдение проводится в плоскости движения системы звезды-планета и масса Солнца равна $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

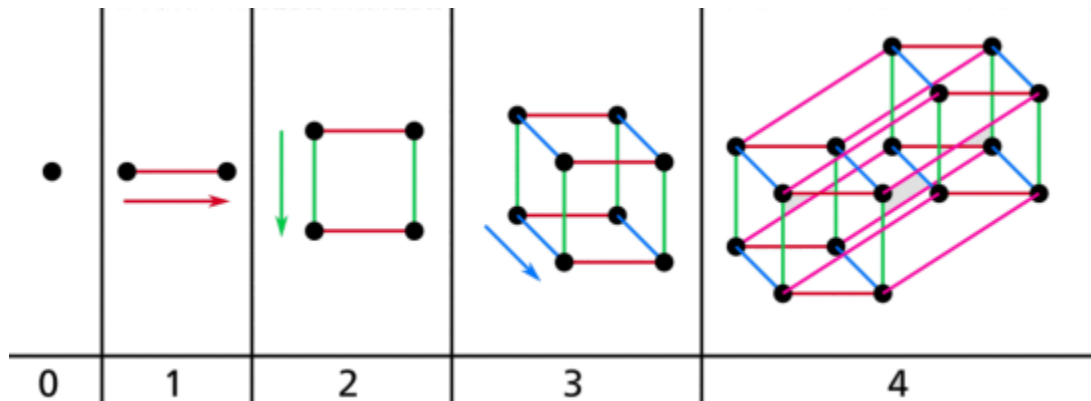


Задача 6. Бешеная задача с Илиясом

Однажды Илиясу приснились пришельцы. В сновидении, инопланетяне забрали его в другое пространство. Вначале он очутился в 4-мерном пространстве. Единственным выходом идти дальше было решение задачи, условие которого было таково: найдите сопротивление 4-мерного проволочного куба (тессеракта) между двумя его самыми дальними вершинами*, если сопротивление каждого ребра равно 1 Ом. Решив её, Илияс очутился в 5-мерном пространстве и ему предложили аналогичную задачу. Он шёл дальше и осознал, что единственным выходом из сна будет решение данной задачи в общем виде. Помогите Илиясу проснуться, то есть найдите сопротивление n -мерного проволочного куба между двумя его самыми дальними вершинами, если сопротивление каждого ребра равно 1 Ом.

*Под самыми дальними точками в n -мерном кубе имеется ввиду две такие точки, чьё наименьшее расстояние друг между другом есть самое большее наименьшее расстояние между двумя любыми точками данного n -мерного куба.

Подсказка: попробуйте решить аналогичную задачу для 2, 3, и 4-мерного куба и найти зависимость. Гиперкуб размерности n имеет 2^n вершин, каждая из которых имеет n соседей. Для того, чтобы получить n -мерный куб, нужно у двух $n-1$ -мерных куба соединить соответствующие вершины, как показано для первых 4 измерений ниже.



Время на прорешку — 180 минут (11:00–14:00);

Капитанский раунд — 15 минут (15:00–15:15);

Рекомендуемое время на раунд — ∞ минут;

Верхний предел на раунд — ∞ минут;

Конец тура — 17:30 (GMT+5) (optional);