Astana Physics Battles 2023

Условия и решения

Старшая лига

Редакция от 28.11.2023

Содержание

Первый раунд

Задание 1. Потребление топлива

Автор: Еркебаев А.

Дисплей автомобиля показывает потребление топлива в литрах на каждые 100 километров. Автомобиль начал ехать по горизонтальной дороге, и когда его скорость стала равна $v_1 = 80$ км/ч, водитель включил круиз-контроль, таким образом поддерживая скорость постоянной. В этом случае потребление топлива стало равным $f_1 = \dfrac{8\ \text{л}}{100\ \text{км}}$. Полагая, что КПД автомобиля неизменен, а сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля, рассчитайте потребление топлива f_2 при скорости $v_2 = 120$ км/ч.

Решение

1. Работа сил против сопротивления воздуха F, уходящая на поддержание постоянного движения автомобиля при перемещении s, равна $A = F \cdot s$. *(3 балла)*

2. Эта работа достигается за счёт сжигания топлива — в этом случае можно написать $A = kf \cdot s$, где k есть коэффициент пропорциональности. *(4 балла)*

3. Учитывая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, можно получить $f_2 = f_1 \dfrac{v_2^2}{v_1^2} = 18$ л/100 км. *(5 баллов)*

Задание 2. Золотая чаша, золотая

Автор: Еркебаев А.

Чашу с водой расположили на электронных весах, на которые затем нажали на кнопку «тара», так что показания весов были нулевыми. Затем камень, подвешенный к динамометру, медленно опустили в воду, и после такого показания весов стали равными 5 Н. Если показания динамометра уменьшились вдвое после погружения, чему равна масса камня? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение

1. Изначально натяжение пружины было равно весу камня: $T = mg$. *(1 балл)*

2. Когда камень погрузили в воду, Архимедова сила начала действовать на камень, так что $0{,}5T + \rho g V = mg$, где V — объём камня. *(4 балла)*

3. Что означает 5 Н, в таком случае? Согласно третьему закону Ньютона, если вода действует на камень с силой $\rho g V$, то сила давления на дно чаши тоже увеличивается на $\rho g V$. *(5 баллов)*

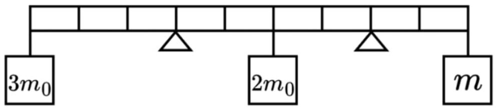
4. В таком случае

$$\begin{cases}\rho g V = \dfrac{mg}{2}, \\ \rho g V = 5\text{ Н}\end{cases} \implies \frac{mg}{2} = 5\text{ Н} \implies m = 1\text{ кг}. \qquad \textit{(2 балла)}$$

Задание 3. Три груза

Автор: Еркебаев А.

Три груза массами m, $2m_0$ и $3m_0$ подвешены на лёгком рычаге, покоящемся на двух опорах так, как показано на рисунке. Одно деление на рычаге имеет длину a. Каков диапазон $\dfrac{m}{m_0}$, при котором система находится в равновесии?



Решение

1. Баланс моментов сил относительно левого и правого опор дают, соответственно,

$$3m_0 \cdot 3a \leqslant 2m_0 \cdot 2a + m \cdot 6a; \qquad \textit{(4 балла)}$$

2. Далее,

$$3m_0 \cdot 7a + 2m_0 \cdot 2a \geqslant m \cdot 2a. \qquad \textit{(4 балла)}$$

3. Следовательно,

$$\frac{5}{6} \leqslant \frac{m}{m_0} \leqslant \frac{25}{2}. \qquad \textit{(4 балла)}$$

Задание 4. «Расстрелять!»

Автор: Бисимби Д.

На расстоянии $L = 300$ м от пушки и на высоте $H = 125$ м находится тело. Тело начинает свободно падать в момент, когда выстреливает пушка. Под каким углом к горизонту надо стрелять, чтобы попасть в тело? Рассмотреть случаи, когда начальная скорость снаряда равна 60 м/с и 80 м/с.

Решение

1. Перейдём в систему отсчёта падающего тела; в ней тело покоится, а на снаряд не действует сила тяжести. Снаряд в этой системе будет всегда двигаться с начальной скоростью, значит, начальная скорость должна быть направлена на тело в начальный момент времени.
(5 баллов)

2. Тело будет падать 5 секунд. *(1 балл)*

3. Начальное расстояние до тела будет 325 м. *(1 балл)*

4. Время, за которое снаряд долетит до тела:

   - при 60 м/с — 5,417 секунд. Снаряд не успеет поразить тело, не существует такого угла. *(3 балла)*

   - При 80 м/с — 4,06 секунд. Снаряд успеет поразить тело. Считаем угол:

   $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{L} = 0{,}417 \implies \alpha = \operatorname{arctg} 0{,}417 = 22{,}6^\circ$$ *(2 балла)*

Задание 5. Подвижность электронов

Автор: Еркебаев А.

Известно, что электрический ток создаётся благодаря упорядоченному движению электронов в металле. Дрейфовая скорость v есть средняя скорость электронов в кристаллической решётке металла под внешним электрическим полем E, и эти величины связаны соотношением

$$v = \mu E,$$

где μ — подвижность электронов. Оцените подвижность электронов для медного проводника. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, концентрация электронов в металле $n = 8{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$, удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Решение

1. Мобильность электрона есть комбинация из ρ, n и e, то есть $\mu = \rho^\alpha n^\beta e^\gamma$. *(3 балла)*

2. Методом размерностей можно получить

   $$\frac{\text{м/с}}{\text{В/м}} = (\text{Ом} \cdot \text{м})^\alpha \cdot \text{м}^{-3\beta} \cdot \text{Кл}^\gamma \implies \text{м}^2 \cdot \text{с}^1 \cdot \text{В}^{-1} = \text{В}^\alpha \cdot \text{м}^{\alpha-3\beta} \cdot \text{А}^{\alpha-\gamma} \cdot \text{с}^{-\gamma},$$

   из чего следует

   $$\begin{cases} 2 = \alpha - 3\beta, \\ 1 = \gamma, \\ -1 = \alpha, \\ 0 = \alpha - \gamma. \end{cases}$$ *(5 баллов)*

3. Следовательно, $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$. *(2 балла)*

4. Или же

   $$\mu \approx \frac{1}{\rho n e} = 4{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}.$$ *(2 балла)*

Задание 5. Чертов дым!

Предложил: Кожабек А. по мотивам задачи Епифанова Д.

Те, кто когда-либо сидели у костра, знают, что огонь всегда дует в их сторону, причиняя большие неудобства. Объясните природу этого явления.

Решение

1. Рассмотрим отдельно стоящий костёр. Нагреваемый им воздух будет подниматься наверх. *(4 балла)*

2. На смену ему будет приходить холодный поток воздуха сбоку. *(4 балла)*

3. Если сесть у костра, вы будете блокировать поток холодного воздуха со своей стороны, создавая новый путь для горячего воздуха от костра. *(4 балла)*

Задание 6. Звезда, планета, луна или самолет

Автор: Кайроллаев Е.

Посмотрев на светящуюся точку в небе, очень просто понять, чем она является: звездой, планетой, Луной или самолётом. Качественно объясните разницу между наблюдением этих объектов невооруженным глазом.

Решение

1. Звезды видимы в качестве быстро мерцающих точек. Из-за движения воздуха в атмосфере в разных частях атмосферы возникают колебания плотности, изменяя угол преломления лучей. *(4 балла)*

2. Планеты, в отличие от звёзд, не мерцают. *(4 балла)*

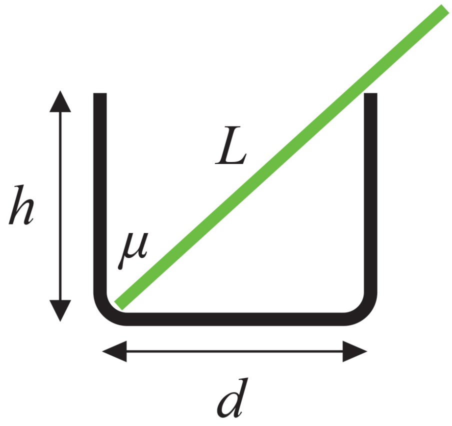
3. Движение самолёта намного заметнее, чем движение звёзд и планет. Их можно отличить за счёт этого. *(3 балла)*

4. Луна намного ярче и больше остальных тел на небе. *(1 балл)*

Задание 8. Трубочка в стаканчике

Автор: Гриднев И.

На столе стоит тонкий осесимметричный стакан массы $M = 200$ г, внутренняя поверхность которого представляет собой цилиндр диаметром $d = 8$ см и высотой $h = 12$ см, с гладким дном и шероховатыми стенками, коэффициент трения которых равен $\mu = 0{,}1$. Каемка стакана так же идеально гладкая. Какую максимальную длину L может иметь трубочка массы m, которую можно опустить в стакан, чтобы система осталась в равновесии?



Решение

1. Принципиально есть две причины из-за которых равновесие может быть нарушено. Во-первых стакан может «опрокинуться», то есть упасть из-за перевеса трубочкой. *(1 балл)*

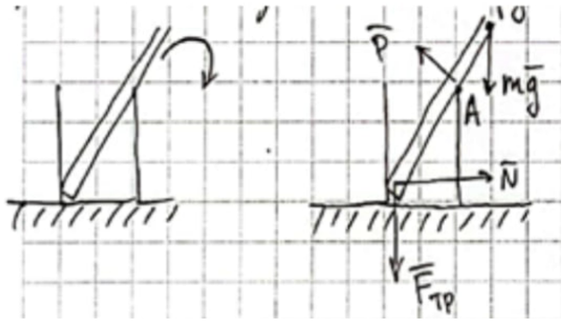
2. В этом случае удобно ввести критерий опрокидывания как максимальную допустимую длину трубочки, при которой центр масс системы будет находиться над самой крайней точкой опоры системы на стол и она все еще будет находиться в равновесии. *(1 балл)*

3. $$Mg\,\frac{d}{2} = mg\left(\frac{L}{2} - \sqrt{d^2+h^2}\right)\cdot\frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}} \implies L = \sqrt{d^2+h^2}\left(\frac{M}{m}+2\right). \qquad \textit{(2 балла)}$$

4. Во-вторых, трубочка может просто начать скользить нижним концом по внутренней поверхности стакана, в то время как последний продолжит стоять на столе. *(1 балл)*

5. Запишем второй закон Ньютона и правила моментов для критической ситуации в этом случае. Когда длина трубочки станет равна максимальной сила реакции на нижний ее конец со стороны дна обратится в ноль. *(1 балл)*

6. $$\begin{cases} F_{\text{тр}} = \mu N \\ N = P\cos\alpha \\ P\cdot\sqrt{d^2+h^2} = mg\,\dfrac{L}{2}\cdot\dfrac{d}{\sqrt{d^2+h^2}} \end{cases} \implies$$
$$\implies N = \frac{mgLd}{2(d^2+h^2)}\cdot\frac{h}{\sqrt{d^2+h^2}} = \frac{mgLdh}{2(d^2+h^2)^{3/2}} \implies$$
$$\implies F_{\text{тр}} = \frac{mgLdh\mu}{2(d^2+h^2)^{3/2}}. \qquad \textit{(2 балла)}$$



7.

$$mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \sqrt{d^2+h^2}\right) \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}} = \frac{mgLdh}{2(d^2+h^2)^{3/2}}\,(h + \mu \cdot d) \implies$$

$$\implies L = \frac{d}{\dfrac{d}{2\sqrt{d^2+h^2}} - \dfrac{dh(h+\mu d)}{2(d^2+h^2)^{3/2}}} = \frac{2\sqrt{d^2+h^2}}{1 - \dfrac{h^2+h\mu d}{d^2+h^2}} = \frac{2\left(\sqrt{d^2+h^2}\right)^3}{d^2 - h\mu d} \quad \textit{(3 балла)}$$

8. При $h\mu \geqslant d$:

$$\sqrt{d^2+h^2}\left(\frac{M}{m} + 2\right);$$

при $h\mu < d$:

$$\min\left(\sqrt{d^2+h^2}\left(\frac{M}{m}+2\right),\ \frac{2(d^2+h^2)^{3/2}}{d^2 - h\mu d}\right).$$

Если численно посчитать оба варианта и выбрать меньший, то ответ будет 110 см. *(1 балл)*

Второй раунд

Задание 1. RED GREEN BLUE

Автор: Бисимби Д.

Пользуйтесь цветами *(в том числе белым и черным)* только из нижеприведённой диаграмы смешивания цветов. Зелёный, красный и синий — это основные цвета. Все другие цвета можно представить в виде суммы этих цветов в разных пропорциях (в диаграмме смешивания в равных пропорциях). К примеру, основной логотип турнира имеет уникальный цвет, который представим в формате RGB в виде $(128; 69; 225)$.

1. Зная, что лучи Солнца в космосе изначально белые, предположите, почему небо и солнце имеют привычный им цвет.

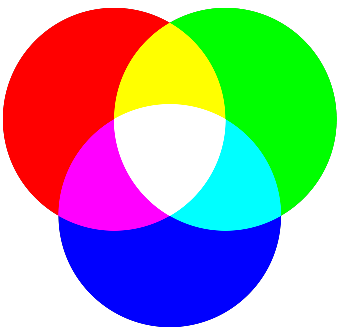
2. У Владимира есть особенное стекло. Это стекло не пропускает некоторые цвета. Владимир обнаружил, что невозможно увидеть привычный нам розовый и жёлтый через это стекло. Какого цвета будет Солнце, если смотреть через это стекло?

3. Владимир купил пачку идеальной краски. Идеальная краска имеет один из основных цветов. При смешивании разных идеальных красок получившаяся смесь имеет все физические и химические свойства составляющих её идеальных красок.

4. Какого цвета будет смесь, если смешать все три идеальные краски?

5. В какие цвета можно покрасить предмет, чтобы он нагревался максимально под прямыми лучами солнца?

В пунктах 4–5 считать, что лучи Солнца только жёлтые.



Решение

1. Небо голубое, а Солнце жёлтое.

- Можно заметить из диаграммы, что белый цвет является суммой жёлтого и голубого цветов. *(1 балл)*
- Из этого можно сделать вывод, что лучи солнца «расщепляются» по пути к Земле. *(1 балл)*
- Между поверхностью Земли и космосом есть атмосфера, она и рассеивает/расщепляет лучи. *(0,5 балла)*

2.
   - Так как голубой цвет виден через стекло, синие и зелёные составляющие света должны пропускаться. Розовый и жёлтый получаются добавлением красного в синий и зелёный соответственно. Можно сделать вывод, что красный цвет не пропускается стеклом.*(1 балл)*
   - Розовый и жёлтый получаются добавлением красного в синий и зелёный соответственно. Можно сделать вывод, что красный цвет не пропускаются стеклом. *(1 балл)*
   - Обычно цвет Солнца — жёлтый, сумма красного и зелёного. Так как стекло не пропускает красный, лучи Солнца будут казаться зелёными. *(0,5 баллов)*

3.
   - Краски имеют цвет, потому что отражают только часть спектра цветов и поглощают остальные. *(1 балл)*

     Например, если краска красная, то она отражает красную составляющую и поглащает зелёную и синюю часть спектра.
   - Если смешать все идеальные краски, то получившаяся смесь будет поглощать весь спектр, не отражая ничего. Получится смесь чёрного цвета. *(1 балл)*

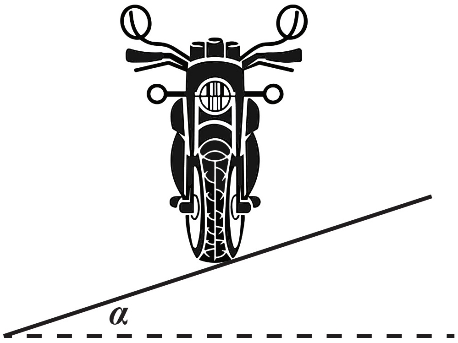
4. Лучи Солнца жёлтые.
   - Нужная нам краска должна отражать жёлтую часть спектра, чтобы минимизировать поглощение и нагрев. *(1 балл)*
   - Жёлтый и белые цвета полностью отражают жёлтую часть спектра.
   - Значит, машину можно покрасить краской жёлтого цвета. *(1 балл)*
   - Значит, машину можно покрасить краской белого цвета. *(0,5 балла)*

5.
   - Нужная нам краска должна поглощать жёлтую часть спектра чтобы максимизировать поглощение. *(1 балл)*
   - Краски синего и чёрного цветов полностью поглощают жёлтую составляющую спектра.
   - Значит, тело можно покрасить краской синего цвета. *(1 балл)*
   - Значит, тело можно покрасить краской чёрного цвета. *(0,5 балла)*

Задание 2. Мотоциклист

Автор: Еркебаев А.

Мотоциклист едет по наклонному повороту с углом $\alpha = 20^\circ$ к горизонту и радиусом кривизны $R = 20$ м. Коэффициент трения между колёсами и покрытием дороги $\mu = 0{,}4$. Какой максимальной скоростью может обладать мотоциклист для плавного поворота?



Решение

1. Сила трения $\vec{f}$ направлена вниз вдоль дороги в противодействие заносу от поворота. *(3 балла)*

2. Уравнения динамики для вертикального и горизонтального направлений записываются в виде:

$$\begin{cases} mg + f\sin\alpha = N\cos\alpha, & \textit{(3 балла)} \\ mg + f\cos\alpha = N\sin\alpha. & \textit{(3 балла)} \end{cases}$$

3. $f = \mu N$, $a = \dfrac{v^2}{R}$

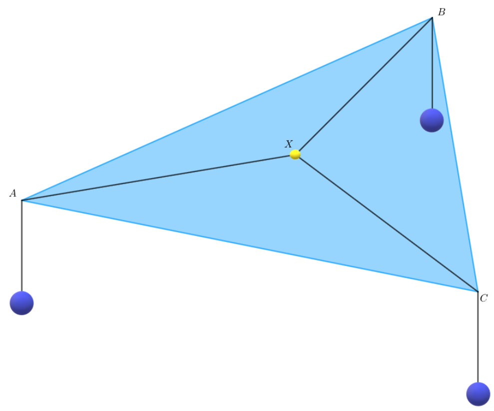
   Решение системы уравнений относительно v даёт

$$v = \sqrt{gR\cdot\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}} = 13{,}24\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad \textit{(3 балла)}$$

Задание 3. «Че-то там доказал...»

Автор: Чалый М.

На гладкой горизонтальной плоскости дан треугольник ABC, каждый угол которого меньше 120°. В его вершинах сделаны маленькие отверстия, а через них продеты нити. К свисающим концам каждой нити подвесили грузы одинаковой массы. Другие концы привязали к небольшому шарику. Система пришла в равновесие, а шарик оказался в точке X.



1. Найдите углы $\angle AXB$, $\angle BXC$ и $\angle CXA$.

2. Существует ли какая-то точка Y внутри треугольника ABC, для которой выполнено неравенство
$$AY + BY + CY < AX + BX + CX?$$

Решение

1. Так как грузы имеют одинаковую массу, то все нити натянуты с одинаковой силой, направленной вдоль нитей. *(1 балл)*

2. Если шарик в покое, то векторная сумма сил, действующих на него, равна 0. Три одинаковых по модулю вектора могут давать 0 в сумме, только если угол между векторами составляет 120 градусов. Поэтому угол между нитями будет 120 градусов. *(4 балла)*

3. В устойчивом положении равновесия энергия системы достигает минимума. *(2 балла)*

4. В данном случае потенциальная энергия всех грузов принимает наименьшее значение, если суммарная длина свисающих частей нитей наибольшая. *(2 балла)*

5. В данном случае потенциальная энергия всех грузов принимает наименьшее значение, если суммарная длина свисающих частей нитей — наибольшая. *(2 балла)*

6. Сумма $AX + BX + CX$ минимальна. *(1 балл)*

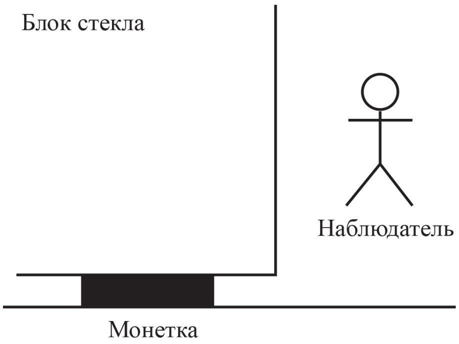
7. Сумма $AX + BX + CX$ минимальна. *(1 балл)*

8. Таким образом, не существует такой точки Y внури треугольника, для которой выполнено неравенство $AY + BY + CY < AX + BX + CX$. *(2 балла)*

Задание 4. Коэффициент преломления

Автор: Еркебаев А.

Небольшую монетку положили на стол, а сверху на неё — прямоугольный блок стекла. Наблюдатель смотрит на монетку из боковой грани блока. При каком минимальном коэффициенте преломления n стекла монетки не будет видно?



Решение

1. Наблюдатель может не видеть монетку в силу полного внутреннего отражения лучей в стекле. *(3 балла)*

2. Критический угол определяется соотношением $\sin\varphi = 1/n$. *(2 балла)*

3. Теперь (см. рисунок) распишем закон преломления Снелла (Снеллиуса):
$$\sin\beta = n\sin(\pi/2 - \varphi) = n\cos\varphi.$$
(2 балла)

4. Запишем угол φ как функцию от коэффициента n:
$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}$$
(2 балла)

5. То есть
$$n = \sqrt{1+\sin^2\beta}$$
(2 балла)

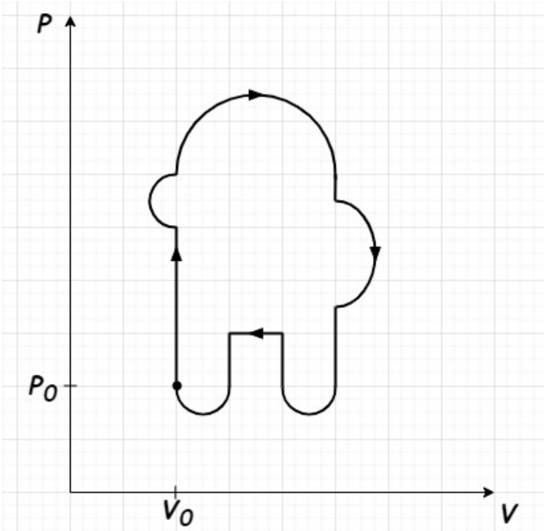
6. Полное отражение происходит во всех диапазонах β, включая верхнюю границу $\beta = \pi/2$, следовательно, ответ
$$n = \sqrt{2}.$$
(1 балл)

Задание 5. Предательский цикл

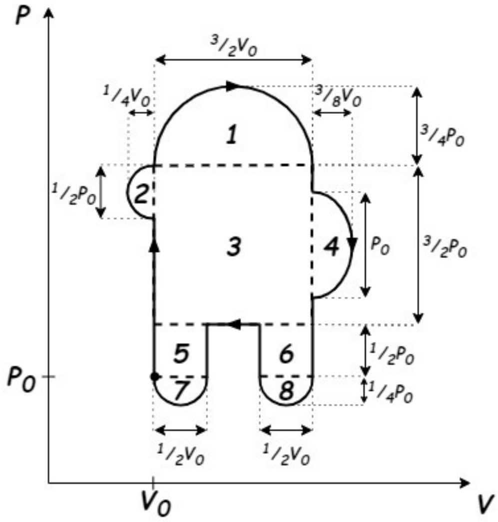
Автор: Нурсагатов М.

На рисунке представлен подозрительный цикл, совершаемый идеальным газом. Начальное давление P_0, начальный объем газа V_0. Найти работу газа в этом предательски необычном процессе.

Подсказка: площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — большая и малая полуоси эллипса соответственно.



Решение



1. Работа газа численно равна площади фигуры на графике. *(2 балла)*

2.

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{3}{4}P_0 \cdot \frac{3}{4}V_0 = \frac{9\pi}{32}P_0V_0, \qquad \textit{(1 балл)}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{4}P_0 \cdot \frac{1}{4}V_0 = \frac{\pi}{32}P_0V_0, \qquad \textit{(1 балл)}$$

$$S_3 = \frac{3}{2}P_0 \cdot \frac{3}{2}V_0 = \frac{9}{4}P_0V_0, \qquad \textit{(1 балл)}$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}P_0 \cdot \frac{3}{8}V_0 = \frac{3\pi}{32}P_0V_0, \qquad \textit{(1 балл)}$$

$$S_5 = S_6 = \frac{1}{2} P_0 \cdot \frac{1}{2} V_0 = \frac{1}{4} P_0 V_0, \qquad \textit{(2 балла)}$$

$$S_7 = S_8 = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{4} P_0 \cdot \frac{1}{4} V_0 = \frac{\pi}{32} P_0 V_0. \qquad \textit{(2 балла)}$$

3. Тогда работа подозрительного газа равна

$$\boxed{A = \left(\frac{15\pi}{32} + \frac{11}{4}\right) P_0 V_0.} \qquad \textit{(2 балла)}$$

Задание 6. «Флэш»

Автор: Бисимби Д.

В 4 серии 8 сезона сериала «Флэш» одноименный персонаж бежит вокруг планеты, чтобы открыть портал. За какое минимальное время он он мог пробежать вокруг Земли?

Решение

1. Чтобы ускоряться, Флеш должен отталкиваться от Земли, то есть сила реакции с Землёй должна быть не равна 0. *(4 балла)*

2. Так как Земля круглая, Флеш будет двигаться по окружности, и с увеличением скорости поднадобится всё большее центростремительное ускорение. *(2 балла)*

3. Из-за этого сила реакции с землёй будет уменьшаться до 0. *(2 балла)*

4. Максимальная скорость будет равна

$$v = \sqrt{g \cdot R_{\text{Земли}}}; \qquad \textit{(3 балла)}$$

5. Минимальное время

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{g}{R_{\text{Земли}}}}. \qquad \textit{(1 балл)}$$

Задание 7. Многоугольник

Автор: Бисимби Д.

Можно ли нарисовать такой выпуклый многоугольник, что с какой-то точки внутри многоугольника можно будет опустить высоту на все стороны так, чтобы высоты пересекались только с продолжением стороны, а не с самой стороной?

Решение

1. Если в реальности такой многоугольник существует, то можно сделать призму в виде этого многоугольника и, меняя распределение вещества, центр масс можно поставить в любую точку многоугольника. *(3 балла)*

2. Представим, что мы сделали призму из такого многоугольника и поместили центр масс в точке, где высоты не пересекаются со сторонами. Тогда вектор сил тяжести не будет попадать на основание, и равновесия не будет. *(3 балла)*

3. Призма перекатится на другую грань, но так как высоты на все грани не пересекают стороны, призма будет бесконечно перекатываться, что невозможно. *(4 балла)*

4. Значит, невозможно нарисовать многоугольник из условий задачи. *(2 балла)*

Задание 8. Бауыржан-Бауыржан...

Автор: Горшунов Н.

Бауыржан редко на уроках слушал учителя; обычно его занимали глубокие философские вопросы. Например, он размышлял:

> *«Можно ли игрушечным пистолетиком вскипятить воду? Ведь в каждом выстреле таится энергия… Допустим, у нас есть большой теплоизолирующий сосуд, в который мы нальём стакан воды. А затем начнём в воду стрелять обычными пластмассовыми пульками. Сколько выстрелов потребуется, чтобы вода начала кипеть? Получится ли вообще её вскипятить?»*

1. Оцените минимальную скорость v, которую должны иметь пульки перед попаданием в воду, чтобы вскипятить её стало возможно.

2. Оцените количество выстрелов для пулек со скоростью $2v$, необходимых, чтобы вода закипела.

- Масса воды в сосуде — 200 г,
- масса одной пульки — 0,15 г,
- удельная теплоёмкость воды — 4 200 Дж/(кг · К),
- удельная теплоёмкость пластмассы — 200 Дж/(кг · К),
- начальная температура воды и пулек — 20°C.

Считать, что сосуд достаточно большой, чтобы вместить в себя все пульки и воду, а пистолет сделан из вибраниума, поэтому не перегревается и не клинит.

Решение

1. При попадании в воду кинетическая энергия каждой пульки полностью перейдёт в тепловую. *(1 балл)*

2. Чтобы нагреть воду до 100 градусов Цельсия пульками было возможно, необходимо, чтобы энергии пульки было больше, чем необходимо для нагрева только её одной до 100 deg C (иначе пульки в принципе не смогут нагреться до 100 deg C). *(2 балла)*

3. То есть необходимо, чтобы

$$\frac{m_{\text{пульки}} \cdot v^2}{2} \geqslant c_{\text{пульки}} m_{\text{пульки}} (t_{100} - t_{20}). \qquad \textit{(3 балла)}$$

4. Тогда

$$v \geqslant \sqrt{2c_{\text{пульки}}(t_{100} - t_{20})} = \sqrt{2 \cdot 200 \cdot 80} \approx 178{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \qquad \textit{(2 балла)}$$

5. Тогда запишем уравнение теплового баланса для N пулек скорости $2v$:

$$c_{\text{воды}} m_{\text{воды}} (t_{100} - t_{20}) + c_{\text{пульки}} m_{\text{пульки}} (t_{100} - t_{20}) = \frac{m_{\text{пульки}} \cdot (2v)^2}{2}. \qquad \textit{(2 балла)}$$

6. Отсюда

$$N = \frac{c_{\text{воды}} m_{\text{воды}} (t_{100} - t_{20})}{2m_{\text{пульки}} v^2 - c_{\text{пульки}} m_{\text{пульки}} (t_{100} - t_{20})} = 9334 \text{ пульки}. \qquad \textit{(2 балла)}$$

Третий раунд

Задание 1. Кипение воды

Автор: Бисимби Д.

1. Почему при достижении определённой температуры вода закипает?

2. Кастрюлю с достаточным количеством воды герметично закрыли и начали нагревать. Когда закипит вода?

3. В чём будет разница, если в пункте 2 кастрюля не герметичная?

Решение

1. - В воде формируются пузырьки, наполненные насыщенным паром. *(2 балла)*
   - Когда давление воды больше давления насыщенных паров, пузырьки схлопываются, и вода не кипит. *(2 балла)*

2. - С ростом температуры растет давление насыщенного пара, и в один момент давление насыщенного пара в пузырьках становится равным давлению воды. Тогда пузырьки не схлопываются и поднимаются на поверхность воды. Так происходит кипение. При температуре 100 градусов по Цельсию давление насыщенных паров равно атмосферному (100 кПа). *(2 балла)*
   - В герметичной кастрюле будет воздух и насыщенный пар над водой. При нагреве кастрюли воздух будет нагреваться и увеличивать давление. Тогда давление над водой будет всегда больше давления насыщенного пара. Все пузырьки будут схлопываться. Вода никогда не закипит. *(2 балла)*

3. Если кастрюля не герметичная, при нагреве воздух и пар не будут накапливаться, и давление над водой будет только атмосферным. Поэтому вода закипит как обычно. *(2 балла)*

Задание 2. Водяной пар

Автор: Бисимби Д.

1. Как появляется насыщенный пар воды?

2. Почему давление насыщенного пара зависит от температуры?

3. Увеличивается или уменьшается ли давление насыщенного пара при увеличении температуры? (Ответ с объяснением.)

Решение

1.
   - Молекулы воды вылетают из воды и становятся молекулами пара. *(1 балл)*
   - Так над водой образуется пар. С увеличением частиц пара некоторые молекулы пара влетают в воду и становятся частью воды. *(1 балл)*
   - Когда два эти потока сравниваются, получается насыщенный пар, количество частиц которого в среднем постоянно. *(2 балла)*
2.
   - Средние кинетические энергии частиц воды определяются температурой. Кинетическая энергия влияет на количество частиц, которое покидает воду: чем выше энергия, тем выше шанс покинуть воду. *(3 балла)*
   - Так как количество частиц, покидающих воду, должно быть уравновешено частицами, приходящими от газа к воде, поток частиц в состоянии равновесия от газа к воде будет зависеть от температуры. *(2 балла)*
   - В то же время поток частиц от газа к воде зависит от концентрации и давления; таким образом, давление насыщенного пара зависит от температуры. *(1 балл)*
3. С увеличением температуры больше частиц будет покидать воду, а значит, больше частиц должно переходить от пара к воде. При больших давлениях больше частиц переходит от пара к воде. Поэтому с температурой увеличивается давление пара. *(2 балла)*

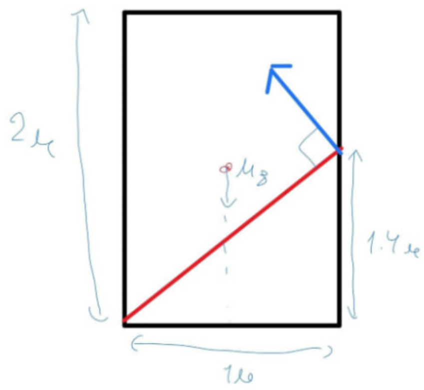
Задание 3. Профсоюз металлургов

Автор: Горшунов Н.

Профсоюз металлургов решил поразвлечься и объявил конкурс, на котором соревнующимся нужно будет из выданных материалов отлить самый большой болт. Об этом конкурсе прознал клуб тяжелоатлетов, который также хотел провести собственный турнир. А потому они решили объединиться и устроить в рамках конкурса металлургов собственный конкурс по опрокидыванию вылитых болтов.

Правила заключались в том, что тяжелоатлеты должны были, используя только руки, повалить представленные болты. Кто сможет повалить самый большой за наименьшее время — тот и выигрывал. Один из тяжелоатлетов задался целью повалить рекордсмена конкурса металлургов — огромный болт цилиндрической формы, сделанный из сплошной стали плотностью 7 800 кг/м^3 и имеющий высоту 2 метра, а радиус основания — 0,5 метра. Тяжелоатлет примерился и оценил, что наиболее удобно ему будет давить на высоте 1,4 метра от основания. В каком направлении тяжелоатлету необходимо давить в данной точке, чтобы при минимальной силе положить самый большой болт? Чему равна эта сила?

Решение



1. При опрокидывании болта точкой опоры служит левый край болта. *(1 балл)*

2. Чтобы опрокинуть его с минимальной силой, надо максимизировать момент сил. Он будет максимальным, когда сила направлена перпендикулярно линии, соединяющей точку опоры и точку приложения силы. *(3 балла)*

3. Чтобы опрокинуть болт, нужно преодолеть момент сил, создаваемый силой тяжести относительно точки опоры. Сила тяжести приложена в центре масс, в геометрическом центре болта. *(2 балла)*

4. Сила тяжести, действующая на болт:
$$Mg = \rho \cdot \pi r^2 \cdot h = 12\,252 \text{ Н}. \qquad (1 \text{ балл})$$

5. Момент силы тяжести:
$$\tau = Mg \cdot r \qquad (1 \text{ балл})$$

6. Момент сил от атлета будет
$$F \cdot \sqrt{4r^2 + \ell^2} \qquad (2 \text{ балла})$$

7. Приравниваем его моменту силы тяжести, чтобы найти минимальную силу:
$$Mg \cdot r = F \cdot \sqrt{4r^2 + \ell^2} \implies F = \frac{Mg \cdot r}{\sqrt{4r^2 + \ell^2}} = 3\,560 \text{ Н}. \qquad (2 \text{ балла})$$

Задание 4. Таяние айсбергов

Автор: Еркебаев А.

Скептики теории глобального потепления утверждают, что таяние айсбергов не влияет на изменения уровня воды, поскольку суммарное гидростатическое давление не изменяется после плавления айсбергов. Хоть такое утверждение может быть вполне оправданным, они не учитывают, что есть много других причин, по которым уровень воды действительно повышается. Одной из таких причин является то, что вода термически расширяется с увеличением температуры:

$$\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T,$$

где знак «минус» показывает снижение плотности воды, а коэффициент термического расширения для воды равен $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$. Рассмотрим нашу планету в виде сферы радиуса $R = 6\,400$ км, которая, для простоты вычислений, полностью покрыта водой с постоянной толщиной $H = 3{,}5$ км. Насколько изменится уровень воды при увеличении температуры планеты на $T = 1$ К?

Решение

1. Объём воды равен $V = SH$, где $S = 4\pi R^2$ — площадь поверхности Земли. *(3 балла)*

2. Учитывая, что $\Delta\rho \ll \rho$, *(2 балла)*

3. Увеличение в объёме можно вычислить из сохранения массы воды $m = \rho V$:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta\rho}{\rho} \implies \Delta H = H \cdot \beta\Delta T = 0{,}7 \text{ м.}$$ *(3 балла)*

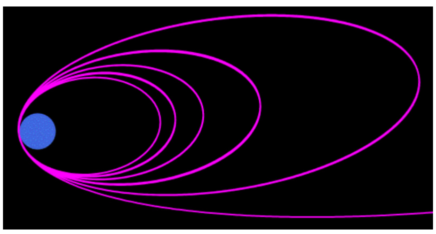
Задание 5. Chandrayaan-3. Часть 1

Автор: Пшенбаев А.

В этом году 23 августа на поверхность Луны высадился Chandrayaan-3 — межпланетная станция, сделанная в Индии для исследования Луны. Тем самым, Индия стала четвертым в истории государством, успешно посадившим на лунную поверхность космический аппарат. Данная задача посвящена рассмотрению упрощенного движения этой станции.

Движение станции

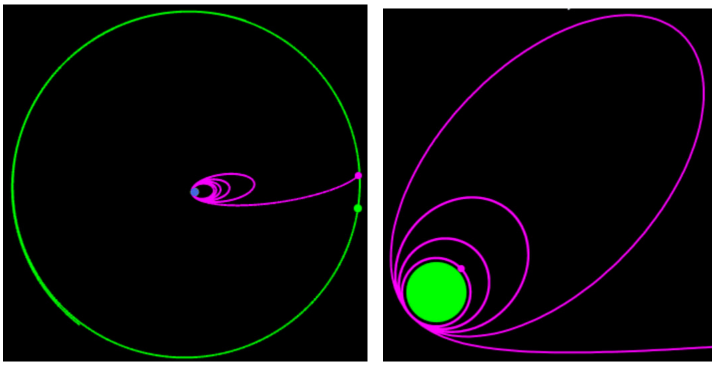
Станция, пролетая на наименьшем расстоянии от центра Земли, получает добавочную скорость за счёт испускания газа. Тем самым, станция начинает двигаться по более вытянутому эллипсу. Когда станция вновь проходит наименьшее расстояние от Земли, она снова получает приращение импульса, пока, в конце концов, не покинет земную орбиту, как показано на рисунке внизу. Синим цветом отмечена Земля, фиолетовым — траектория станции. Для вычисления численных ответов берите $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ кг^2/м^2 и округляйте численные ответы до двух чисел после запятой.



1. Наибольшее расстояние от центра Земли до станции для пятого эллипса равна $R = 130\,000$ км. Найдите скорость спутника в перигее. Перигей равен радиусу Земли $R_1 = 6\,400$ км. Масса Земли $M_1 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг.

2. Оцените величину Δv_1, на которую нужно увеличить скорость станции в перигее для пятой траектории эллипса, чтобы станция покинула земную орбиту. Воздействие Луны пренебрежимо мало.

   После того как станция покинет Землю, её «схватит» Луна своей гравитацией, как показано на рисунке слева. Войдя в зону гравитационного притяжения Луны, станция, аналогично вылету из Земли, будет двигаться по траектории, показанной справа. Зеленым отмечена Луна.



3. Станция в апогее имела скорость $u_2 = 0{,}25$ км/с. Найдите скорость станции в перигее. Перигей станции равен радиусу Луны. Радиус Луны $R_2 = 1\,740$ км, а ее масса $M_2 = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг.

4. Определите на какую величину Δv_2 нужно уменьшить скорость станции в перигее, что бы она начала двигаться по круговой окололунной орбите.

Источник: https://en.wikipedia.org/wiki/Chandrayaan-3

Решение

1. Для решения этого и последующих пунктов воспользуемся законами сохранения энергии и импульса.

   Запишем энергию в перигее и апогее:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GM_1m}{R_1},$$
$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GM_1m}{R},$$

   где v_1 — скорость в перигее, v_2 — скорость в апогее. Эти энергии по закону сохранению энергии равны. Поэтому

$$E_1 = E_2,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GM_1m}{R_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GM_1m}{R} \qquad \textit{(1 балл)}$$

Теперь запишем момент импульса в апогее и перигее:

$$L_1 = mv_1R_1,$$
$$L_2 = mv_2R.$$

Из закона сохранения момента импульса имеем

$$L_1 = L_2,$$
$$mv_1R_1 = mv_2R. \qquad \textit{(1 балл)}$$

Решая, получаем:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_1R}{(R+R_1)R_1}} \approx 10{,}89 \text{ км/с} \qquad \textit{(1 балл)}$$

Чтобы найти скорость в перигее, можно также приравнять E_1 к общей энергии эллипса:

$$E_1 = E = -\frac{GM_1m}{2a},$$
$$a = \frac{(R+R_1)}{2},$$
$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GM_1m}{R_1} = -\frac{GM_1m}{(R+R_1)},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_1R}{(R+R_1)R_1}} \approx 10{,}89 \text{ км/с}.$$

2. Скорость, при которой он покинет земную гравитацию, находится аналогично нахождению второй космической скорости:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{GM_1m}{R_1} = 0,$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_1}{R_1}} \approx 11,16 \text{ км/с}. \qquad \textit{(2 балла)}$$

Значит, изменение скорости равно

$$\Delta v_1 = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{2GM_1}{R_1}}\left(1 - \sqrt{\frac{R}{R+R_1}}\right) \approx 0,27 \text{ км/с} \qquad \textit{(1 балл)}$$

На самом деле, более точное нахождение скорости, необходимой для того, чтобы станция достигла Луны, находится из рассмотрения движения станции по эллипсу с апогеем, равным радиусу орбиты Луны. Но так как этот радиус много больше радиуса Земли, скорость, найденная в этом решении приближает её с хорошей точностью.

3. Запишем, аналогично первому пункту, энергию в перигее и апогее:

$$\frac{mu_1^2}{2} - \frac{GM_2m}{R_2} = \frac{mu_2^2}{2} - \frac{GM_2m}{r}, \qquad \textit{(1 балл)}$$

где u_1 — скорость в перигее, r — расстояние до апогея. Теперь запишем закон сохранения момента импульса:

$$mu_1R_2 = mu_2r. \qquad \textit{(1 балл)}$$

Решая, получаем квадратное уравнение:

$$u_1^2 + u_1u_2 - \frac{2GM_2}{R_2} = 0;$$

$$u_1 = \frac{u_2}{2}\left(\pm\sqrt{1 + \frac{8GM_2}{u_2^2R_2}} - 1\right).$$

Выбираем ответ с плюсом, так как ответ с минусом не имеет физического смысла. Тогда получаем:

$$u_1 = \frac{u_2}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{8GM_2}{u_2^2R_2}} - 1\right) \approx 2{,}25 \text{ км/с} \qquad \textit{(1 балл)}$$

4. Условие, при котором станция будет вращаться по круговой орбите:

$$\frac{GM_2m}{R_2^2} = \frac{mu_0^2}{R_2},$$

откуда получаем скорость кругового движения:

$$u_0 = \sqrt{\frac{GM_2}{R_2}} \approx 1{,}68 \text{ км/с} \qquad \textit{(1 балл)}$$

Значит, величина изменения скорости равна

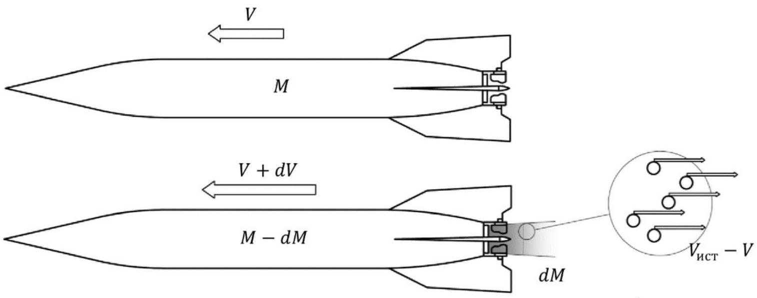
$$\Delta v_2 = u_1 - u_0 = \frac{u_2}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{8GM_2}{u_2^2R_2}} - 1\right) - \sqrt{\frac{GM_2}{R_2}} \approx 0{,}57 \text{ км/с}. \qquad \textit{(1 балл)}$$

Задание 6. Chandrayaan-3. Часть 2

Автор: Пшенбаев А.

Механизм работы сопла

Как было сказано в предыдущей части, станция изменяет свою скорость в перигее за счет испускания топлива. Считайте, что станция испускает газ в перигее параллельно своему направлению движения и на нее не действует сила сопротивления, как показано на рисунке внизу.



Скорость истечения газа относительно станции равна $V_{\text{ист}} = 3$ км/с. Определите величину изменения массы станции Δm для того, чтобы увеличить скорость на $\Delta v = 0{,}57$ км/с, если начальная масса перед этим приращением скорости равна $m_0 = 2\,560$ кг. *Математическая подсказка:*

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad C = \text{const}.$$

Решение

1. Так как внешних сил нет, суммарный импульс системы не меняется. Тогда по закону сохранения импульса

$$MV = (M - dM)(V + dV) - dM(V_{\text{ист}} - V),$$
$$dMV_{\text{ист}} = MdV. \qquad \textit{(3 балла)}$$

2. Интегрируя, получаем:

$$\Delta v = V_{\text{ист}} \int_m^{m_0} \frac{dM}{M} = V_{\text{ист}} \ln\left|\frac{m_0}{m}\right|. \qquad \textit{(3 балла)}$$

3. Для нахождения изменения массы:

$$\Delta v = V_{\text{ист}} \ln\left|\frac{m_0}{m}\right| \implies m = m_0 e^{-\Delta v_1/V_{\text{ист}}} \qquad \textit{(3 балла)}$$

4. Значит, величина изменения массы равна

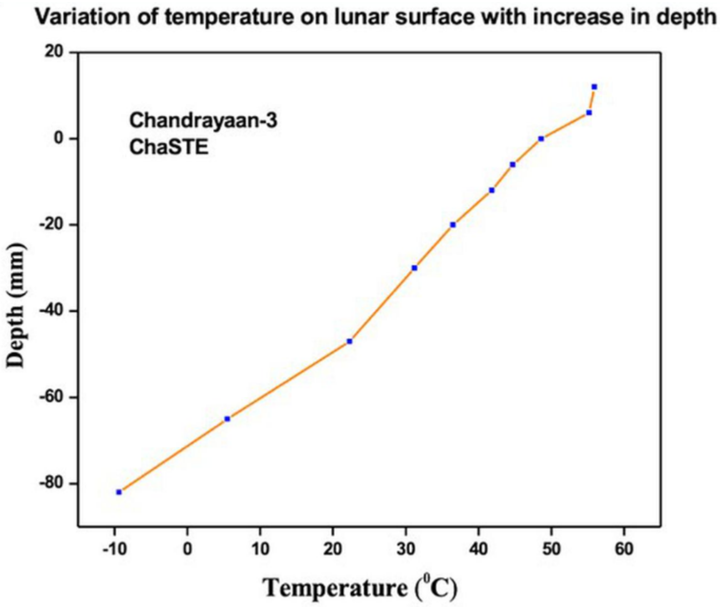
$$\Delta m = m - m_0 = m_0\left(1 - e^{-\Delta v/V_{\text{ист}}}\right) \approx 443 \text{ кг}. \qquad \textit{(3 балла)}$$

Задание 7. Chandrayaan-3. Часть - 3

Автор: Пшенбаев А.

Теплопроводность поверхности Луны

Во время движения станции по окололунной орбите, посадочный модуль *Vikram* отделился от двигательного модуля и приступил к последнему этапу миссии. После мягкой посадки посадочного модуля на Луну, одной из его задач было измерение теплопроводности и температур на разных высотах под поверхностью Луны. По итогу, получился график, изображенный на рисунке внизу.



Используя график, оцените мощность теплового потока на поверхности Луны. Коэффициент теплопроводности лунного грунта $\lambda = 2.5$ Вт/(К · м).

Решение

1. Из закона Фурье, мощность теплового потока прямо пропорциональна разности температур, и обратно пропорциональна толщине. Поэтому:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta h}$$

(4 балла)

2. Используя приведенный в задаче график, можно приблизительно наклон графика:

$$\frac{\Delta h}{\Delta T} \approx \frac{(0.02 - (-0.08))}{(60 - (-10))} \frac{\text{м}}{\text{К}} = \frac{0.1}{70} \frac{\text{м}}{\text{К}}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} \approx 700 \frac{\text{м}}{\text{К}}$$

(4 балла)

3. Тогда для мощности теплового потока получаем:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta h} \approx -1750 \text{ Вт/м}^2$$

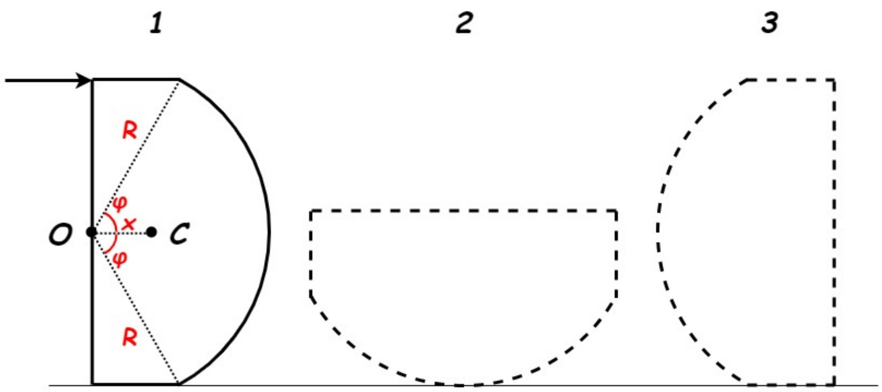
(4 балла)

Если так подумать, получился весьма интересный реультат. При разности высот равном всего 10-ти сантиметрам, разность температур на этих высотах равна 70-ти градусам. Сам ученый из ISRO (Indian Space Research Organisation), BH Darukesha сказал что такой высокий диапазон температуры в районе поверхности для них был не ожидаем.

Задание 8. Игра в чехол

Автор: Аширова Е.

На уроке английского школьнице Дасе стало скучно, и она придумала занимательную игру со своим чехлом от очков. Чехол имеет форму призмы с основанием в виде полукруга с центром в точке О и радиуса R. Бока чехла усечены как показано на рисунке. Угол φ известен. Масса чехла m, центр масс находится на расстоянии x от точки О. Игра заключается в следующем. Дасе нужно толкнуть чехол так, чтобы он с одного бока перекатился на другой. Со временем Дася научилась беспроигрышно играть в эту игру. В каких пределах находится кинетическая энергия, которую Дася сообщает чехлу? При каких значениях x возможно существование этих пределов?



Решение

1. Начальная высота центра масс равна

$$h = R\sin\varphi.$$

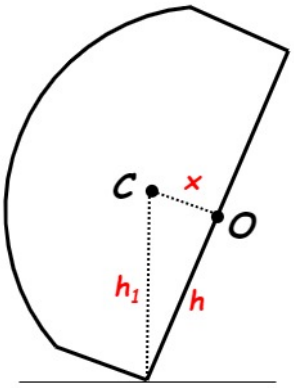
(1 балл)

2. Мы предполагаем, что в этом положении чехол остановится. Тогда из закона сохранения энергии получаем верхний предел кинетической энергии:

$$K_{max} = U_1 - U = mg(h_1 - h)$$

(1 балл)

$$K_{max} = mg(\sqrt{R^2\sin^2\varphi + x^2} - R\sin\varphi)$$

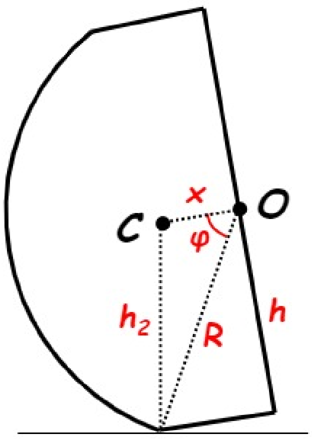


3. Рассмотрим случай, когда чехол почти "перелетел"положение равновесия. Чехол встанет на бок, только если его центр масс находится левее точки опоры, в предельном случае - над ней (см. рисунок). Высота центра масс в этом положении равна

$$h_1 = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + x^2}.$$

(1 балл)

(1 балл)



4. Теперь рассмотрим случай, когда чехол почти "не долетел"до положения равновесия. Чехол встанет на бок, только если его центр масс находится правее точки опоры, в предельном случае - над ней (см. рисунок) *(1 балл)*.
   Высота центра масс в этом положении равна

$$h_2 = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \varphi}.$$

(1 балл)

5. Нижний предел кинетической энергии

$$K_{min} = U_2 - U = mg(h_2 - h),$$

$$\boxed{K_{min} = mg\left(\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \varphi} - R \sin \varphi\right)}.$$

(1 балл)

6. Существование пределов будет возможно только при

$$K_{max} > K_{min},$$

(2 балла)

то есть

$$\boxed{x > \frac{R\cos\varphi}{2}}.$$

(1 балл)

В противном случае победа в игре будет возможна только при значении кинетической энергии K_{min}. При меньших значениях будет недолет, при больших - перелет.

Четвертый раунд

Задание 1. Торррнадо

Автор: Амирбеков М.

> *После того, как страх превышает некую отметку, от людей можно ждать чего угодно. Они становятся непредсказуемыми, как торнадо.*
>
> Стивен Кинг, «Роза Марена» (1995)

Торнадо (или смерч) - это мощное и разрушительное атмосферное явление, которое представляет собой узкую вращающуюся колонну воздуха, свисающую с нижней стороны грозового облака и касающуюся земли. Однажды Алишер вместе с Ернуром решили прогуляться по улице и вдалеке увидели отдаляющийся от них смерч. Не теряя времени, Алишер заснял явление на камеру с определенным разрешением.

Часть 1
Высота торнадо

Алишер и Ернур, засняв качественное фото, вернулись домой и по полученному фото начали исследовать размеры торнадо. Допустим, что у юных физиков были самые сильные камеры, что могли заснять смерчь на очень большом расстоянии.
Характеристики камеры и фотографии:

$$\begin{cases} \text{Вертикальная длина сенсора} - L; \\ \text{Количество пикселей на вертикальной стороне сенсора} - n_L; \\ \text{Количество пикселей высоты торнадо} - n_l; \\ \text{Фокусное расстояние объектива} - F. \end{cases}$$

1. Оцените высоту торнадо h, если Алишер и Ернур с помощью онлайн карты рассчитали расстояние между ними и торнадо, равное d.

В следующей части исследования молодые физики решили сосредоточиться на изучении торнадо. Торнадо формируются благодаря интенсивным воздушным перемешиваниям. Поскольку теплый воздух легче холодного, при взаимодействии этих потоков воздуха начинают стремительно подниматься вверх, образуя большие мезоциклоны, которые представляют собой потоки теплого и холодного ветра в форме цилиндра. Известно, что внешняя оболочка торнадо изобарна, то есть имеет одинаковое атмосферное давление на краях.

Часть 2

Давление торнадо

2. Принимая, что температура окружающей среды постоянна и не зависит от высоты над поверхностью Земли, найти давление внешней оболочки торнадо. Торнадо доходит до известной высоты $h_{\max}$, учитывая часть кучево-дождевого облака.

Математическая подсказка

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Часть 3

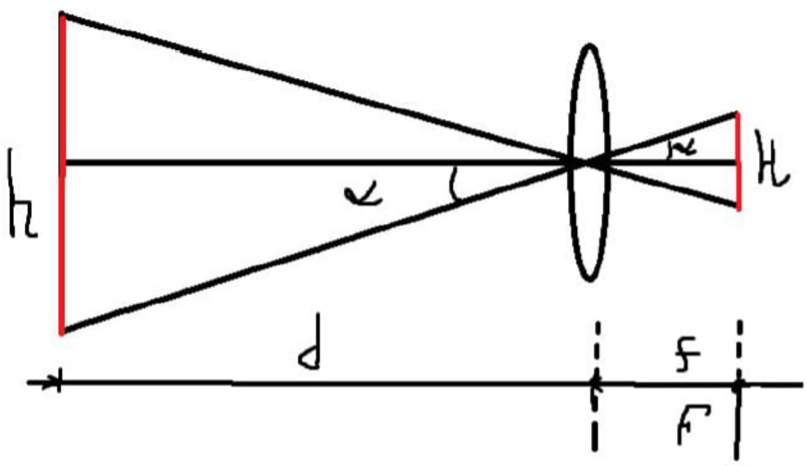
3. Найти функцию зависимости радиуса торнадо от её высоты $r(h)$, если в нижней точке внешней оболочки радиусом $r_в$ скорость потока воздуха равна $v_в$.

Полезные физические постоянные для Частей 2 и 3:

$$\begin{cases} g - \text{ускорение свободного падения;} \\ \mu_в - \text{молярная масса воздуха;} \\ R - \text{универсальная газовая постоянная;} \\ T - \text{температура окружающей среды;} \\ p_0 - \text{атмосферное давление на поверхности Земли вдали от торнадо.} \end{cases}$$

Решение

Часть 1

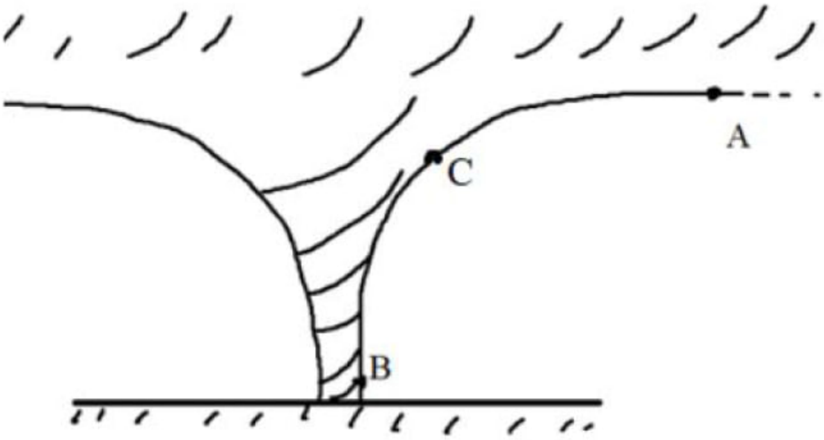


1. $H = \dfrac{n_l}{n_L} \cdot L$ *(1 балл)*

2. $\dfrac{H}{F} = \dfrac{h}{d}$ *(1 балл)*

3. $h = \dfrac{d}{f}\dfrac{n_l}{n_L} \cdot L$ *(1 балл)*

Часть 2



1.

$$p(h + dh)S + mg = p(h)$$

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho S g}{S} = -\rho g$$

(2 балла)

2.

$$pV = \frac{m}{\mu_{\text{в}}} RT$$

$$-\int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{p} = \int_{o}^{h} \frac{\mu_B g}{RT} dh$$

(1 балл)

3. p(h)=p0eBghRTp(h)=p$_0 \cdot e^{\frac{\mu_B g h}{RT}}$ *(1 балл)*

, . : $pB = pA = p(h) = p0eBghmaxRT p_B = p_A = p(h) = p_0 \cdot e^{\frac{\mu_B g h_{\max}}{RT}}$ *(1 балл)*

4. **Часть 3**

1. Уравнение Бернулли для внешней точки торнадо

$$p + \frac{\rho v(r)^2}{2} + \rho g h(r) = p + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

(1 балл)

2. Закон сохранения момента импульса для точки внутри торнадо

$$mvr = mv_B r_B$$

$$v(r) = v_B \frac{r_B}{R}$$

(1 балл)

3. $$h(r) = v_B^2 2g(1 - r_B^2 r^2) h(r) = \frac{v_B^2}{2g}\left(1 - \frac{r_B^2}{r^2}\right)$$ *(1 балл)*

Так как давление во внешкой оболочке везде одинаково, то в точке A его значение будет равно значению в точке B. Таким образом:

4. $$p_B = p_A = p(h) = p_0 \cdot e^{\frac{\mu_B h_{max}}{RT}}$$ *((1 балл))*

Задание 2. Физическая природа музыки

Автор: Нурсагатов М.

Мы используем звуки для создания музыки, как мы используем слова, чтобы создать язык.

Фредерик Шопен (1810–1849)

Введение

Звук как физическое явление представляет собою колебательное движение какого-нибудь тела - источника звука (струны, мембраны, воздушного столба в духовом инструменте), создающего звуковые волны. Воспринимаемый нами звук зависит от его физических свойств. Вопрос о создании общей музыкальной шкалы возник ещё в древности, но был решен лишь в начале XVIII века (после появления алгебры иррациональных величин и логарифмов) немецким учёным и музыкантом Андресом Веркмейстером, чьи идеи в дальнейшем развил И. С. Бах. В этой задаче постараемся воссоздать ход мыслей Веркмейстера и построить музыкальную шкалу - *звукоряд*.

Часть 1
Качества звука

Качествами звука называются отражения физических свойств звука в наших ощущениях. К ним относится *громкость*, *высота* и *тембр*, или окраска звука.
Громкость звука зависит от нескольких факторов, главным из которых является его интенсивность (средняя энергия, проходящая через единичную площадку в единицу времени). Интенсивность звука I можно найти по формуле Умова:

$$I = wv,$$

где w - средняя плотность энергии волны (энергия на единицу объема), v - скорость распространения волны (скорость звука).
Известно, что w является функцией плотности среды ρ, циклической частоты звука ω и его амплитуды A.

1.1. Используя метод размерностей, выразите w через ρ, ω и A. Численный коэффициент примите равным $\frac{1}{2}$.

1.2. Выразите интенсивность I через ρ, v, ω и A.

Высота звука зависит от частоты, а тембр - от его состава. Рассмотрим колебания струны длины l. Скорость звука равна v. Как известно, при колебаниях струны образуется стоячая волна, а на концах струны находятся узлы.

1.3. Выразите возможные длины волн λ_n и соответствующие частоты колебания струны f_n.

В дальнейшем считайте $f_n = f \cdot n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$
В звучании каждой струны есть основной тон $f_1 = f$ $(n = 1)$, определяющий высоту звука, а также *обертона* $2f$, $3f$, $4f$, и т. д., от которых зависит тембр.

Часть 2
Бас или сопрано?

У всех людей разные голоса: у кого-то ниже, у кого-то выше. То же самое касается и музыкальных инструментов. Поэтому необходимо обеспечить возможность переносить мелодию по высоте. Этого можно добиться если шкала будет представлять собою некоторую прогрессию, ведь в таком случае роль будут играть не частоты звуков, а соотношения между ними. Такой звукоряд называется *темперированным*.

Совместное звучание двух звуков называется *интервалом* $[f_{\text{ниж}}, f_{\text{верх}}]$. Каждый интервал характеризуется числовым коэффициентом, равным отношению частот верхнего и нижнего тонов

$$k = \frac{f_{\text{верх}}}{f_{\text{ниж}}} \quad (k \geqslant 1).$$

Этим коэффициентом можно также характеризовать положение верхнего звука относительно нижнего. Интервал между двумя звуками одинаковой частоты называется *примой*. В приме звуки полностью сливаются. Интервал между некоторым звуком и звуком двойной частоты называется *октавой*. В октаве наблюдается практически полное слияние: верхний звук повторяет нижний, но звучит выше.

2.1. Найдите коэффициент $k_{\text{прим}}$, характеризующий приму, и коэффициент $k_{\text{окт}}$, характеризующий октаву.

2.2. Составьте ряд частот (семейство частот) из 5 членов, соседние члены которого составляют октаву, таким образом, чтобы посередине была частота f. Какую прогрессию представляет этот ряд?

Такие звуки имеют одинаковые названия (например, ля) и образуют семейство частот. На основе обнаруженной периодичности было решено делить музыкальную шкалу на участки, называемые *октавами* (так же как и интервал). Верхний звук одной октавы является нижним звуком следующей. Очевидно, для музыки одних октав недостаточно. Поэтому нам следует разбить октаву на более мелкие *элементарные* интервалы, тем самым уместив в пределах октавы некоторое количество m звуков (не считая верхнего). Повторяясь в каждой октаве эти звуки и составят наш звукоряд. Обозначим частоту нижнего (первого) звука октавы равной f_1, а верхнего (последнего), стало быть, $f_{m+1} = 2f_1$. Коэффициент, характеризующий элементарный интервал $[f_{i-1}, f_i]$, обозначим q.

2.3. Выразите частоту i-го (не первого) звука в октаве f_i через частоту предыдущего звука f_{i-1} и q.

2.4. Выразите частоту i-го (не первого) звука в октаве f_i через частоту f_1 и q. Запишите выражение для коэффициента k_i, характеризующего интервал $[f_1, f_i]$.

2.5. Считая m известным, запишите выражение для коэффициента q. Перепишите результаты пункта **2.4**, используя полученное выражение для q.

Часть 3

Музыка ухо режет, а кровь не течет...

Еще одним условием для нашей шкалы, конечно, является звучность мелодии. Под термином «звучность» подразумевается сочетаемость звуков в нашем звукоряде. Чтобы разобраться, какие звуки сочетаются, а какие нет, рассмотрим следующий пример.
Возьмем 2 струны с частотами f и $2f$. Приведя в колебание только первую струну мы услышим основной тон частоты f. Теперь приглушим первую струну. Можно было бы ожидать наступление тишины, но как показывает опыт мы будем слышать звучание уже второй струны $2f$. Объясняется это тем, что обертон $2f$ первой струны возбуждает путем резонанса колебания второй струны. Такой же результат получится, если провести этот опыт с другими частотами: $3f$, $4f$, $5f$ (далее результат уже не столь заметен). Эти звуки дополняют и усиливают друг друга, что слухом и воспринимается как «звучность». Поэтому в пределах октавы мы хотели бы иметь хотя бы по одному представителю семейств этих частот, т.е. удовлетворяющих условию:

$$f_1 < f < 2f_1.$$

3.1. Считая f_1 известными, запишите выражение для частоты $f_{\text{квинт}}$ звука, представляющего семейство частот $3f_1$ в пределах октавы $[f_1, 2f_1]$. Интервал $[f_1, f_{\text{квинт}}]$ называется *квинтой.* Запишите значение $k_{\text{квинт}}$.

3.2. Считая f_1 известными, запишите выражение для частоты $f_{\text{терц}}$ звука, представляющего семейство частот $5f_1$ в пределах октавы $[f_1, 2f_1]$. Интервал $[f_1, f_{\text{терц}}]$ называется *терцией.* Запишите значение $k_{\text{терц}}$.

Октава, квинта и терция являются представителями трех первых и наиболее слышимых семейств обертонов ($2f_1$, $3f_1$, $5f_1$). Поэтому они звучат наиболее «звучно» и «устойчиво», их звуки как бы сливаются и допоплняют друг друга. В большинстве случаев на их основе строится *гармония* - приятная для слуха и постигаемая разумом слаженность звуков.
Разными способами меняя и комбинируя интервалы, можно получать новые.
Если в интервале перенести нижний звук на октаву вверх или верхний на октаву вниз, то получится новый интервал. Такой прием в музыке называется *обращением*, а получившийся интервал - *обращением* начального интервала.

3.3. Пусть у нас имеется интервал $[f_x, f_y]$ с коэффициентом $k = f_x/f_y$. Запишите 2 возможных обращения этого интервала в виде $[f_{\text{ниж}}, f_{\text{верх}}]$. Выразите коэффициент k', характеризующий обращение интервала, через k.

3.4. Обращением квинты получается новый интервал - *кварта.* Запишите выражение для коэффициента $k_{\text{кварт}}$, характеризующего кварту.

Помимо этого интервалы можно складывать и отнимать. Например, суммой интервалов $[f_a, f_b]$ и $[f_b, f_c]$ является интервал $[f_a, f_c]$. Разностью интервалов $[f_d, f_f]$ и $[f_e, f_f]$ является интервал $[f_d, f_e]$.

3.5. Пусть имеются 2 интервала с коэффициентами k_1 и k_2. Запишите выражения для коэффициента k_+, характеризующего сумму этих интервалов $(a+b)$, и коэффициента k_-, характеризующего разность этих интервалов $(b-a)$.

3.6. Сложением квинты и терции получается новый интервал - *септима.* Запишите выражение для коэффициента $k_{\text{септ}}$, характеризующего септиму.

3.7. Сложением терции и кварты получается новый интервал - *секста.* Запишите выражение для коэффициента $k_{\text{секст}}$, характеризующего сексту.

3.8. Интервал, получившийся по формуле (квинта+квинта-октава) называется *секундой.* Запишите выражение для коэффициента $k_{\text{секунд}}$, характеризующего секунду.

Часть 4

Выбор, сделанный сегодня, определяет наше завтра…

Математическая подсказка

Если $2^x = k$, то $x = \log_2 k = \frac{\ln k}{\ln 2}$

Пользуясь результатами предыдущих частей, мы наконец можем перейти к выбору звуков в наш звукоряд.

Анализ устоявшейся в результате многовекового развития народной музыки показал, что упомянутые в **части 3** интервалы встречаются чаще всего. Поэтому в пределах октавы желательно уместить их всех.

Пусть всего звуков в октаве m, а звук с частотой f_x является i_x-ым по счету. Помните, что m и i_x - натуральные числа.

4.1. Пользуясь результатом пункта **2.5.** получите выражение для дроби $\frac{i_x-1}{m}$ через k_x.

4.2. Найдите численное значение этого выражения для каждого интервала, подставляя значения $k_{\text{прим}}$, $k_{\text{секунд}}$, $k_{\text{терц}}$, $k_{\text{кварт}}$, $k_{\text{квинт}}$, $k_{\text{секст}}$, $k_{\text{септ}}$, $k_{\text{окт}}$. Округлите до 3-х цифр после запятой.

В этом пункте значения должны выйти иррациональными (кроме $k_{\text{прим}}$ и $k_{\text{окт}}$), хотя дробь $\frac{i_x-1}{m}$ безусловно рациональная. Это говорит о том, что невозможно уместить точные значения частот этих звуков в темперированный звукоряд. Решить эту проблему удастся, подобрав такое количество звуков m, чтобы дроби $\frac{i_{\text{секунд}-1}}{m}$, $\frac{i_{\text{терц}}-1}{m}$, $\frac{i_{\text{кварт}}-1}{m}$, $\frac{i_{\text{квинт}}-1}{m}$, $\frac{i_{\text{секст}}-1}{m}$, $\frac{i_{\text{септ}}-1}{m}$ были максимально близки к значениям, вычисленным в пункте **4.2**.

Рассуждать будем следующим образом. Все эти дроби должны относиться друг к другу как натуральные числа:

$$\frac{i_{\text{секунд}-1}}{m} : \frac{i_{\text{терц}}-1}{m} : \frac{i_{\text{кварт}}-1}{m} : \frac{i_{\text{квинт}}-1}{m} : \frac{i_{\text{секст}}-1}{m} : \frac{i_{\text{септ}}-1}{m} =$$

$$= (i_{\text{секунд}} - 1) : (i_{\text{терц}} - 1) : (i_{\text{кварт}} - 1) : (i_{\text{квинт}} - 1) : (i_{\text{секст}} - 1) : (i_{\text{септ}} - 1)$$

4.3. Это выражение перепишите, подставляя вместо $(i_x - 1)$ значения, вычисленные в пункте **4.2.**. Снова перепишите выражение, разделив все члены полученной пропорции на первый член и округлив полученные числа до 2-х цифр после запятой. В третий раз перепишите выражение, округлив некоторые числа до целого, а некоторые до ближайшей половины (например, число $1,32$ правильнее округлить до $1,5$, нежели до 1). После округления домножьте выражение на 2 и запишите окончательную пропорцию из натуральных чисел.

Получившееся выражение и есть пропорция $(i_{\text{секунд}} - 1) : (i_{\text{терц}} - 1) : (i_{\text{кварт}} - 1) : (i_{\text{квинт}} - 1) : (i_{\text{секст}} - 1) : (i_{\text{септ}} - 1)$. Последнее число в выражении есть $i_{\text{септ}} - 1$, где $i_{\text{септ}}$ равно числу звуков в октаве (не считая верхнего) m.

4.4. Запишите числовое значение m. Пользуясь этим, запишите, чему равен коэффициент элементарного интервала q. Этот элементарный интервал называется *полутоном.*

4.5. Вычислите значения дробей $\frac{i-1}{m}$ для всех интервалов октавы (для i от 1 до $m+1$) и округлите до 3-х цифр после запятой. Подпишите дроби, соответствующие интервалам: прима, секунда, терция, кварта, квинта, секста, септима, октава.

Семи основным интервалам: прима, секунда, терция, кварта, квинта, секста, септима, - соответствуют семь основных звуков октавы: до, ре, ми, фа, соль, ля, си (звук, соответствующий интервалу октава является началом следующей октавы, поэтому в счет не берется). Остальные 5 звуков используются в мелодии реже.

Т.к. все интервалы характеризуются лишь относительной величиной, нам необходимо выбрать эталонный звук, на основе которого будут определены частоты всех остальных. Таковым было решено выбрать звук ля$_1$ первой октавы (средняя по высоте октава) и приписать ему частоту $f_{\text{ля}_1}$=440 Гц.

4.6. Вычислите частоты остальных звуков первой октавы: $f_{\text{до}_1}$, $f_{\text{ре}_1}$, $f_{\text{ми}_1}$, $f_{\text{фа}_1}$, $f_{\text{соль}_1}$, $f_{\text{си}_1}$, а также частоту звука до$_2$ второй (находится над первой) октавы $f_{\text{до}_2}$. Округлите до целых.

4.6. Вы
частоту

Заключение

Таким образом, мы получили звукоряд, состоящий из повторяющихся на разной высоте участков, называемых октавами. В октаве есть mm звуков, интервал между соседними звуками называется полутоном и характеризуется коэффициентом qq. Мы вычислили частоты семи основных звуков первой октавы: до$_1$, 1ре$_1$, 1ми$_1$, 1фа$_1$, 1соль$_1$, 1ля$_1$, 1си$_1$, — и первого звука второй октавы до$_2$, тем самым получив гамму До-мажор.

Поздравляю!

Решение

Часть 1

(2 балла)

1.

$$[w] = \text{Дж} \cdot \text{м}^{-3} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}, [w] = \text{с}^{-1}, [A] = \text{м}$$

$$w = \frac{1}{2}\rho w^2 A^2$$

(0.8 балла)

2.

$$I = \frac{1}{2}\rho v w^2 A^2$$

(0.2 балла)

3. Так как на концах струны находятся узлы стоячей волны, то на длине струны умещается целое число полуволн:

$$\frac{\lambda_n}{2} \cdot n = l$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

$$f_n = \frac{v}{2l} \cdot n$$

(1 балл)

Часть 2

(2 балла)

1.

$$k_{\text{прим}} = 1$$

$$k_{\text{окт}} = 1$$

(0.2 балла)

2.

$$\ldots, \frac{1}{4}f, \frac{1}{2}f, f, 2f, 4f, \ldots \text{ – геометрическая прогрессия}$$

(0.4 балла)

3.

$$q = \frac{f_i}{f_{i-1}}$$

(0.2 балла)

4.

$$f_i = q^{i-1} f_1$$

$$k_i = \frac{f_i}{f_1}$$

$$k_i = q^{i-1}$$

(0.6 балла)

5. Для последнего звука октавы $(m+1)$:

$$f_{m+1} = q^m f_1$$

$$q = 2^{\frac{1}{m}}$$

$$f_1 = 2^{\frac{i-1}{m}}$$

$$k_1 = 2^{\frac{i-1}{m}}$$

(0.6 балла)

Часть 3

(4 балла)

1. Семейство частот $3f_1$:

$$..., \frac{3}{4}f_1, \frac{3}{2}f_1, 3f_1, 6f_1, 12f_1, ...$$

   Единственным представителем этого семейства, удовлетворяющим усло- вию $f_1 < f < 2f_1$, является $\frac{3}{2}f_1$

$$f_{\text{квинт}} = \frac{3}{2}f_1$$

$$k_{\text{квинт}} = \frac{3}{2}$$

(0.4 балла)

2. Семейство частот $5f_1$:

$$..., \frac{5}{4}f_1, \frac{5}{2}f_1, 5f_1, 10f_1, 20f_1, ...$$

   Единственным представителем этого семейства, удовлетворяющим усло- вию $f_1 < f < 2f_1$, является $\frac{5}{4}f_1$

$$f_{\text{терц}} = \frac{5}{4}f_1$$

$$k_{\text{терц}} = \frac{5}{4}$$

(0.4 балла)

3. Переносом нижнего звука на октаву вверх получаем:

$$[f_y, 2f_x]$$

Переносом верхнего звука на октаву вниз получаем:

$$[\frac{1}{2}f_y, f_x]$$

Коэффициент, характеризующий обращение интервала, равен

$$k' = \frac{2f_x}{f_y} = \frac{f_x}{\frac{1}{2}f_y} = 2 \cdot \frac{f_x}{f_y}$$

$$k' = \frac{2}{k}$$

(1 балл)

4.

$$k_{\text{кварт}} = \frac{2}{k_{\text{квинт}}} = \frac{4}{3}$$

(0.2 балла)

5. Коэффициент, характеризующий сумму интервалов, равен

$$k_+ = \frac{f_c}{f_a} = \frac{f_b}{f_a} \cdot \frac{f_c}{f_b}$$

$$k_+ - k_1 \cdot k_2$$

$$f_1 = 2^{\frac{i-1}{m}}$$

Коэффициент, характеризующий разность интервалов, равен

$$k_- = \frac{f_e}{f_d} = \frac{f_f}{f_d} : \frac{f_f}{f_e}$$

$$k_- = k_2/k_1$$

(1 балл)

6.

$$k_{\text{септ}} \cdot k_{\text{тецр}} \cdot k_{\text{квинт}} = \frac{15}{8}$$

(0.2 балла)

7.

$$k_{\text{секст}} \cdot k_{\text{терц}} \cdot k_{\text{кварт}} = \frac{5}{3}$$

(0.2 балла)

8.

$$k_{\text{секунд}} = 2k_{\text{квинт}}/k_{\text{окт}} = \frac{9}{8}$$

(0.6 балла)

Часть 4

(4 балла)

1.

$$2^{\frac{i_x-1}{m}} = k_x$$

$$\frac{i_x - 1}{m} = \log_2 k_x = \frac{x}{\ln 2}$$

(0.2 балла)

2.

$$\log_2 k_{\text{прим}} = \log_2 1 = 0$$

$$\log_2 k_{\text{секунд}} = \log_2 \frac{9}{8} = 0,169$$

$$\log_2 k_{\text{терц}} = \log_2 \frac{5}{4} = 0,323$$

$$\log_2 k_{\text{кварт}} = \log_2 \frac{4}{3} = 0,416$$

$$\log_2 k_{\text{квинт}} = \log_2 \frac{3}{2} = 0,585$$

$$\log_2 k_{\text{securityкст}} = \log_2 \frac{5}{3} = 0,737$$

$$\log_2 k_{\text{септ}} = \log_2 \frac{15}{8} = 0,908$$

$$\log_2 k_{\text{окт}} = \log_2 2 = 1$$

(0.8 балла)

3.

$$0,169 : 0,323 : 0,416 : 0,585 : 0,737 : 0,908 = 1 : 1,91 : 2,46 : 3,46 : 4,36 : 5,37 \approx$$

$$\approx 1 : 2 : 2,5 : 3,5 : 4,5 : 5,5 = 2 : 4 : 5 : 7 : 9 : 11$$

(0.8 балла)

4.

$$m - 1 = 11$$

$$m = 12$$

$$q = 2^{1/12}$$

(0.2 балла)

5. Прима:

$$\frac{0}{12} = 0$$

$$\frac{1}{12} = 0,083$$

Секунда:

$$\frac{2}{12} = 0,167$$

$$\frac{3}{12} = 0,250$$

Терция:

$$\frac{4}{12} = 0,333$$

Кварта:

$$\frac{5}{12} = 0,418$$

$$\frac{6}{12} = 0,500$$

Квинта:

$$\frac{7}{12} = 0,583$$

$$\frac{8}{12} = 0,767$$

Секста:

$$\frac{9}{12} = 0,750$$

$$\frac{10}{12} = 0,833$$

Септима:

$$\frac{11}{12} = 0,917$$

Октава:

$$\frac{12}{12} = 1$$

(1.3 балла)

6. Интервал $[f_{\text{до}_1}, f_{\text{ля}_1}]$ составляет сексту. Отсюда

$$f_{\text{ля}_1} = 2^{\frac{9}{12}} f_{\text{до}_1}$$

$$f_{\text{до}_1} = 2^{-\frac{9}{12}} f_{\text{ля}_1}$$

Все остальные частоты можно вычислить по формуле

$$f_{\text{до}_1} = 2^{\frac{i_x - 1}{12}} f_{\text{до}_1}$$

$$f_{\text{до}_1} = 262\text{Гц}$$

$$f_{\text{ре}_1} = 294\text{Гц}$$

$$f_{\text{ми}_1} = 330\text{Гц}$$

$$f_{\text{фа}_1} = 349\text{Гц}$$

$$f_{\text{соль}_1} = 392\text{Гц}$$

$$f_{\text{ля}_1} = 440\text{Гц}$$

$$f_{\text{си}_1} = 494\text{Гц}$$

$$f_{\text{до}_2} = 523\text{Гц}$$

(0.7 балла)

Задание 3. Приливы и отливы

Автор: Нурсагатов М.

В делах людей прилив есть и отлив.
С приливом достигаем мы успеха,
Когда ж отлив наступит,
Лодка жизни по отмелям несчастья волочится.

Марк Юний Брут, роман Уильяма Шекспира «Юлий Цезарь»

Введение

У берегов океанов и морей по два раза в сутки наблюдается поднятие (*прилив*) морской воды до максимального уровня (*полная вода*) и опускание (*отлив*) до минимального уровня (*малая вода*). Промежуток времени между соседними состояниями полной (или малой) воды, т.е. *период колебаний уровня воды в океане* равен T = 12 ч 25 мин, что точно совпадает с половиной *лунных суток* $T_Л$= 24 ч 50 мин (период обращения Луны вокруг Земли для земного наблюдателя). Еще в древности люди связывали приливы и отливы с положением Луны. В этой задаче мы рассмотрим упрощённую модель приливов и отливов, отметив самые важные моменты.
Вам понадобятся численные значения следующих величин:

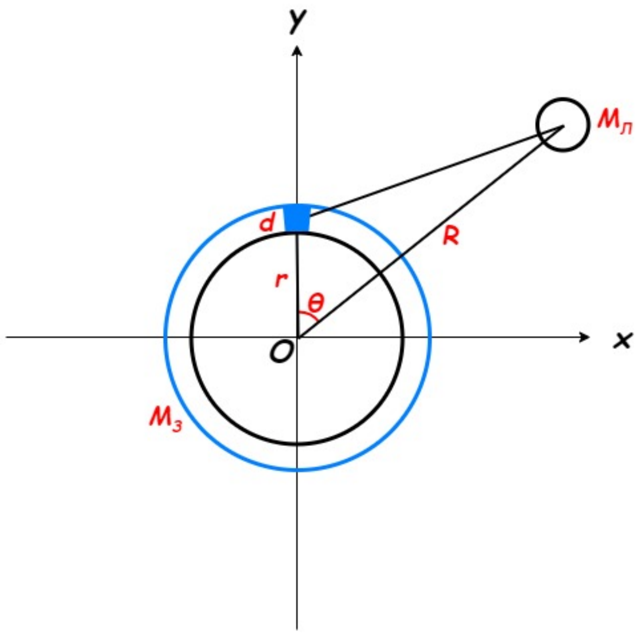
- Масса Земли $M_З = 6,0 \cdot 10^{24}$ кг;
- Масса Луны $M_Л = 7,4 \cdot 10^{22}$ кг;
- Радиус Земли $r = 6370$ км;
- Расстояние между центрами Земли и Луны $R = 385 \cdot 10^3$ км;
- Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с^2;
- Средняя глубина океана $d = 3,5$ км;
- Лунные сутки $T_Л = 24$ ч 50 мин;
- Период колебаний уровня воды в океане T = 12 ч 25 мин.

Часть 1
Приливные силы

Для простоты Землю будем считать твердым шаром, покрытым океаном постоянной глубины. Также будем считать, что Луна движется в плоскости Земного экватора. Влиянием Солнца и других планет, потерями энергии пренебрежем.

1.1. Выразите циклическую частоту ω колебаний уровня воды в океане через T.

1.2. Выразите угловую скорость Ω обращения Луны вокруг Земли через ω.



Рассмотрим маленький участок океана и найдем действующую на него приливную силу. Нас интересует только ее радиальная составляющая, заставляющая уровень воды подниматься и опускаться. Потенциал приливных сил возле рассматриваемого участка, складываемый из потенциала сил тяготения Луны и потенциала поступательных сил инерции, равен

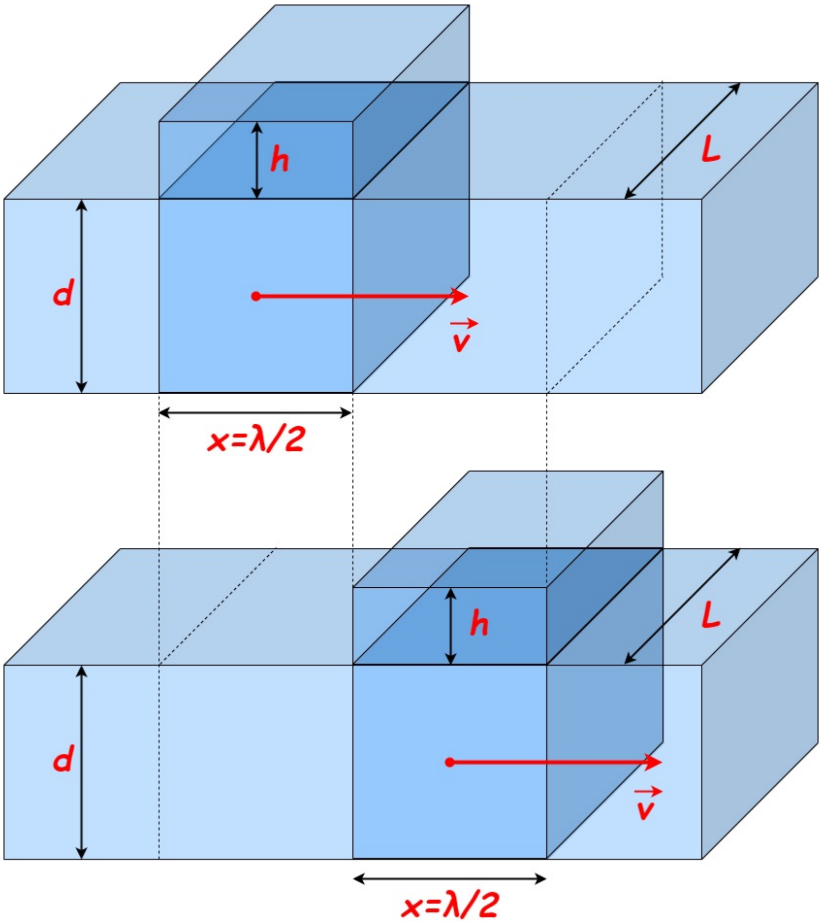
$$\varphi = -\frac{3}{4}\frac{GM_Л}{R^3}r^2\cos 2\theta.$$

Множитель $\cos 2\theta$ означает, что приливные силы, а значит, и форма поверхности океана в диаметрально противоположных точках одинаковы.

1.3. Выразите радиальную составляющую приливной силы на единицу массы f_r, действующей на рассматриваемый участок, через $M_З$, $M_Л$, r, R, θ и ускорение свободного падения $g = \frac{GM_З}{r^2}$.
1.4. Запишите зависимость от времени приливной силы $f_r(t)$, считая, что в начальный момент Луна находилась в зените над рассматриваемым нами участком ($\theta(0) = 0$). Выразите ответ через $M_З$, $M_Л$, r, R, g, ω, t.

Часть 2
Колебания Океана

Для количественной оценки явления приливов и отливов сначала изучим поведение океана в отсутствие приливных сил (свободные колебания).



Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль экватора. Длину волны обозначим λ, период волны τ, плотность воды ρ.

Потенциальная энергия поднятой части воды переходит в кинетическую энергию движения воды, и наоборот. Для простоты будем считать, что

1) поднятая часть воды имеет форму параллелепипеда со сторонами $h, L, x = \frac{\lambda}{2}$;

2) движется только часть воды, находящаяся под поднятой частью (параллелепипед со сторонами $d, L, x = \frac{\lambda}{2}$), и ее скорость равна v.

2.1. Выразите кинетическую энергию движущейся воды K через ρ, λ, L, d, v.

2.2. Выразите потенциальную энергию поднятой воды относительно спокойной поверхности океана U через ρ, λ, L, g, h.

2.3. Используя тот факт, что кинетическая и потенциальная энергии в волне равны, выразите v через g, d, h.

В нашей модели поднятая вода своим весом выталкивает вперед воду под собой. Т.е. наблюдается сохранение объема: объем воды, вытекающий из-под поднятой части воды за половину периода $\frac{\tau}{2}$, равен объему поднятой части (поднятая вода опускается на место вытекшей воды).

2.4. Используя сохранение объема воды и выражение для v из предыдущего пункта, выразите τ через λ, g, d.

2.5. Выразите скорость распространения волны c через g, d.

Время, за которое волна сделает пол оборота вдоль экватора, назовем периодом колебаний океана. Мы берем лишь половину оборота потому что, как было отмечено в части 1, в диаметрально противоположных точках Земли форма поверхности океана одинаковая.

2.6. Выразите период колебаний океана T_0 и его собственную частоту ω_0 через g, d, r.

Часть 3
Когда прилив, а когда отлив?

Как и для любых вынужденных колебаний, для колебаний уровня воды на рассматриваемом участке под действием приливных сил в рамках наших приближений можно записать

$$\ddot{h}(t) + \omega_0^2 h(t) = f_r(t).$$

Можно показать, что решением этого уравнения является функция

$$h(t) = \frac{f_r(t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

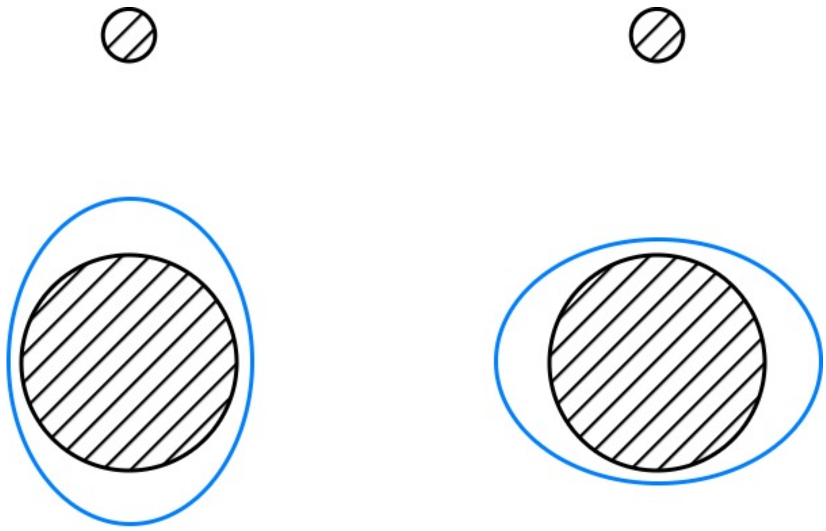
3.1. Пользуясь результатом пункта **1.4.**, вычислите амплитуду f_0 колебаний приливной силы.

3.2. Пользуясь результатом пункта **1.1.**, вычислите ω.

3.3. Пользуясь результатом пункта **2.6.**, вычислите T_0 и ω_0.

3.4. Вычислите амплитуду H колебаний уровня воды.

3.5. Какой из представленных ниже рисунков является более правильным и почему?



a b

Решение

Часть 1 *(2.5 балла)*

(2.5 балла)

1.

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}.}$$

(0.2 балла)

2.

$$\Omega = \frac{2\pi}{T = \frac{2\pi}{2T}},$$

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega}{2}}$$

(0.3 балла)

3.

$$f_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{3}{2}\frac{GM}{R^3} r \cos 2\theta,$$

$$\boxed{f_r = \frac{3}{2}\frac{M}{M\left(\frac{r}{R}\right)^3 g \cos 2\theta}.}$$

(1.5 балла)

4.

$$\theta(t) = \theta(0) + \Omega t = \frac{\omega}{2} t,$$

$$\boxed{f_r(t) = \frac{3}{2}\frac{M}{M\left(\frac{r}{R}\right)^3 g \cos \omega t}.}$$

(0.5 балла)

Часть 2

(5 баллов)

1.

$$K = \frac{1}{2}m_{\text{движ}}v^2, \ m_{\text{движ}} = \rho \cdot \frac{1}{2}\lambda L d,$$

$$\boxed{K = \frac{1}{4}\rho\lambda L d \cdot v^2}.$$

(1,0 балла)

2.

$$U = \frac{1}{2}m_{\text{подн}}gh, \ m_{\text{подн}} = \rho \cdot \frac{1}{2}\lambda L h,$$

$$\boxed{U = \frac{1}{4}\rho\lambda L g \cdot h^2}.$$

(1,0 балла)

3.

$$\frac{1}{4}\rho\lambda L d \cdot v^2 = \frac{1}{4}\rho\lambda L g \cdot h^2,$$

$$\boxed{v = h\sqrt{\frac{g}{d}}}.$$

(0,1 балл)

4.

$$\frac{1}{2}\lambda L h = \frac{1}{2}\tau v \cdot L d,$$

$$\boxed{\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{gd}}},$$

(1,0 балла)

5.

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{gd}}.$$

(0.5 балла)

6.

$$T_0 = \frac{\pi r}{c},$$

$$\boxed{T_0 = \frac{\pi r}{\sqrt{gd}}},$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\sqrt{gd}}{r}}.$$

(1,0 балл)

Часть 3

(2.5 балла)

1.

$$\boxed{f_0 = 8,21 \cdot 10^{-7}\ \text{Н}}.$$

(0,5 балла)

2.

$$\boxed{\omega = 1,41 \cdot 10^{-4}\ \text{Гц}}.$$

(0.4 балла)

3.

$$\boxed{T_0 = 30\ \text{ч}},$$

$$\boxed{\omega = 0.60 \cdot 10^{-4}\ \text{Гц}}.$$

(0.2 балла)

4.

$$\boxed{H = \left|\frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right| = 50\ \text{м}}.$$

(0.3 балла)

5. Т.к. $\omega_0 < \omega$, уравнение колебаний будет иметь вид

$$h(t) = -H\cos(\omega t) = H\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),$$

т.е. колебания уровня воды будут происходить в противофазе с колебаниями приливной силы. На максимум приливной силы (когда Луна находится в зените или надире) приходится малая вода, и наоборот, на минимумы приливной силы (когда Луна находится в квадратуре) приходится полная вода.

(1,0 балла)

Задание 4. Ночная дорога

Автор: Шишкин А.

Нет мудрее и прекрасней средства от тревог…

Юрий Визбор (1973)

Часть 1
Деформация рельс

Железнодорожная сеть Казахстана является одной из самых протяженных в мире, обеспечивая важные транспортные связи между различными регионами страны. Система железнодорожных путей в стране представляет собой сложный инженерный объект, эксплуатация которого связана с рядом серьезных вызовов из-за экстремальных температурных условий. В летний период температура может достигать +40°C, а зимой опускаться до -40°C. Традиционно, для управления тепловым расширением рельс, на железнодорожных путях используются зазоры между отдельными секциями рельс. Эти зазоры позволяют рельсам свободно расширяться и сжиматься с изменением температуры, минимизируя возникновение внутренних напряжений, которые могли бы вызвать деформацию или повреждение рельс.
В данной части задачи, Вам предстоит изучить вопрос теплового расширения при проектировании железной дороги. Пусть железная дорога состоит из стальных рельс длиной L = 25 метров, установленных при температуре +20°C.

1.1. Какой должна быть минимальная ширина зазора между рельсами, чтобы компенсировать тепловое расширение при максимальной расчетной температуре +50°C? Коэффициент линейного теплового расширения = $11 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}.

Известно, что при увеличении зазора до 20 мм скорость поезда ограничивается, а при увеличении зазора до 35 мм движение поезда становится невозможным.

1.2. При какой температуре скорость поезда будет ограничена, и при какой температуре движение поезда будет отменено из-за теплового сжатия рельс?

Далее рассмотрим сценарий возникновения механического напряжения в рельсах в случае недостаточного размера зазора между ними.

1.3. Докажите формулу $\sigma = \alpha \cdot E \cdot \Delta T$, где σ – механическое напряжение, α – коэффициент линейного теплового расширения материала*, E – модуль упругости материала, ΔT – изменение температуры с момента, когда зазор между рельсами сократился до нуля.

Пусть при температуре +20°C зазор между рельсами составляет 3 мм, а максимальное механическое напряжение, предшествующее деформации рельс, составляет 50 МПа.

1.3. Какой будет максимальная температура, при которой рельсы не деформируются? Модуль упругости стали равен $200 \cdot 10^9$ Па.

Часть 2
Белые рельсы

Во многих странах для железнодорожного транспорта характерна ситуация с зазорами между рельсами, которые компенсируют тепловое расширение. Однако, этот подход может оказаться непригодным для высокоскоростных железных дорог, где скорость движения поездов может достигать 300 км/ч и выше, так как зазоры между рельсами могут вызывать нежелательные колебания и удары, ухудшая комфорт и безопасность пассажиров. Для решения этой проблемы, некоторые железнодорожные компании, такие как *Deutsche Bahn* в Германии и *Network Rail* в Великобритании, применяют технологию окраски рельс в белый цвет, чтобы уменьшить их нагревание от солнечных лучей.

Железнодорожные рельсы могут быть подвергнуты значительному нагреву под воздействием солнечного излучения. Для уменьшения этого эффекта предложено окрасить рельсы в белый цвет, что уменьшает коэффициент абсорбции солнечного излучения. Рассмотрим рельсы длиной L = 25 метров, с площадью поверхности, облучаемой солнцем = 1 м^2, площадью для теплообмена с атмосферой = 2 м^2. Рельсы изготовлены из стали с удельной теплоемкостью. Коэффициент абсорбции для черного цвета рельс = 0.9, а для белого цвета рельс = 0.2. Интенсивность солнечного излучения I = 1000 Вт/м^2. Коэффициент теплоотдачи в атмосферу h = 25 Вт/(м$^2 \cdot ^\circ$ C). Температура окружающей среды = 20°C.

2. На сколько будут различаться температуры неокрашенной и окрашенной в белый цвет рельс, когда их температуры устоятся? Радиационной составляющей теплообмена пренебречь.

*Коэффициент линейного теплового расширения - это величина, показывающая, в сколько раз изменится длина объекта при его нагревании или охлаждении на один градус Цельсия.
Примечение: поперечным расширением и напряжением, нелинейностью теплового расширения и изменениями свойств материала с температурой пренебречь.

Решение

Часть 1

(9 баллов)

1. Для решения этой задачи, нам нужно использовать формулу линейного теплового расширения:

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$$

$$\Delta L = 11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot 25\text{м} \cdot 30^{\circ}C$$

$$\boxed{\Delta L = 8.25 \cdot 10^{-3}\text{м}}$$

(1 балл) Таким образом, минимальная ширина зазора между рельсами должна быть 8.25 мм, чтобы компенсировать тепловое расширение при максимальной расчетной температуре $+50^{\circ}C$.

(1 балл)

2. Формула для линейного теплового расширения:

$$\Delta L = \alpha \cdot T \cdot \Delta T \Longrightarrow \Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha \cdot L}$$

3.

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L}$$

(1 балл)

$$\Delta L_1 = 20 \text{ мм - } 8.25 \text{ мм} = 11.75 \text{ мм}$$

(1 балл)

$$\Delta T_1 = \frac{11.75 \cdot 10^{-3}}{11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot 25} = 42.73^{\circ}C$$

(0.5 балла)

$$\Delta L_2 = 35 \text{ мм - } 8.25 \text{ мм} = 26.75 \text{ мм}$$

(1 балл)

$$\Delta T_2 = \frac{26.75 \cdot 10^{-3}}{11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot 25} = 97.27 \text{ мм}$$

(0.5 балла)

Так как исходная температура была 20 °C, нам нужно вычесть это значение из ΔT_1 и ΔT_2, чтобы получить конечные значения. Скорость поезда будет ограничена при температуре:

$$\boxed{T_1 = 20^{\circ}C - 42.73^{\circ}C = -22.73^{\circ}C}$$

(0.5 балла)

Движение поезда будет отменено при температуре:

$$\boxed{T_2 = 20^{\circ}C - 97.27^{\circ}C = -77.27^{\circ}C}$$

(0.5 балла)

4. При изменении температуры материала, его размеры изменяются. Изменение длины материала с изначальной длиной L и коэффициентом линейного теплового расширения можно выразить как $\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$
При упругой деформации материала, механическое напряжение связано с модулем упругости E и относительным изменением длины следующим образом:

$$\varepsilon \frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T$$

(1 балл)

$$\sigma = \varepsilon E = \alpha \Delta T E$$

(1 балл)

5. Чтобы зазор между рельсами стал равен нулю, температура должна повыситься на ΔT_1 :

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T_1 \Longrightarrow \Delta T_1 = \frac{\Delta L}{\alpha \cdot L} = 11.9^{\circ}C$$

(0.5 балла) Используем формулу для механического напряжения, вызванного тепловым расширением:

$$\sigma = \alpha \cdot E \cdot \delta T_2$$

Решим уравнение для ΔT:

$$\Delta T_2 = \frac{\sigma}{\alpha \cdot E} = \frac{50 \cdot 10^6}{11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot 200 \cdot 10^9} = 22.73^{\circ}C$$

(0.5 балла) Так как исходная температура была $20^{\circ}C$, максимальная температура, при которой рельсы не деформируются, будет:

$$\boxed{T = 20^{\circ}C + 11.9^{\circ}C + 22.73^{\circ}C = 54.63^{\circ}C}$$

(1 балл)

Часть 2

(3 балла)

1. Предполагая установившийся тепловой режим и пренебрегая излучением, для обоих рельсов можно записать:

$$P_{\text{солн}} = P_{\text{отд}}$$

(0.5 балла) где $P_{\text{солн}}$ - мощность поглощаемого солнечного излучения, $P_{\text{отд}}$ - мощность конвективной теплоотдачи. Для рельса окрашенного в черный цвет:

$$P_{\text{солн}} = \alpha I S_{\text{солн}}$$

(0.5 балла)

$$P_{\text{отд}} = h S_{\text{отд}}(T - T_{\text{окр}})$$

(0.5 балла)

$$T = \frac{\alpha I S_{\text{солн}}}{h S_{\text{отд}}} + T_{\text{окр}}$$

(0.5 балла)

$$\boxed{\Delta T = \frac{(\alpha_{\text{черн}} - \alpha_{\text{бел}}) I S_{\text{солн}}}{h S_{\text{отд}}} = 14^\circ}$$

(1 балл)

Пятый раунд

Задание 1. Китайский волчок

Автор: Нурсагатов М.

На рис. 1 представлен китайский волчок, вращающийся вокруг своей оси симметрии. Со временем центр масс волчка поднимается, он начинает опрокидываться и в конце концов становится на ножку, как показано на рис. 2. Перерисуйте рисунки 3(a) и 3(b) и изобразите на них:

1) вектор скорости $\vec{v_A}$ точки касания волчка с поверхностью A;

2) вертикальную составляющую момента импульса $\vec{L_z}$ волчка относительно его центра масс C;

3) векторы всех сил, действующих на волчок;

4) векторы моментов этих сил относительно центра масс C.

Объясните засчет момента какой силы переворачивается волчок?

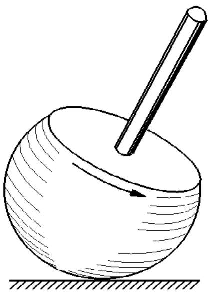


Рис. 1: китайский волчок

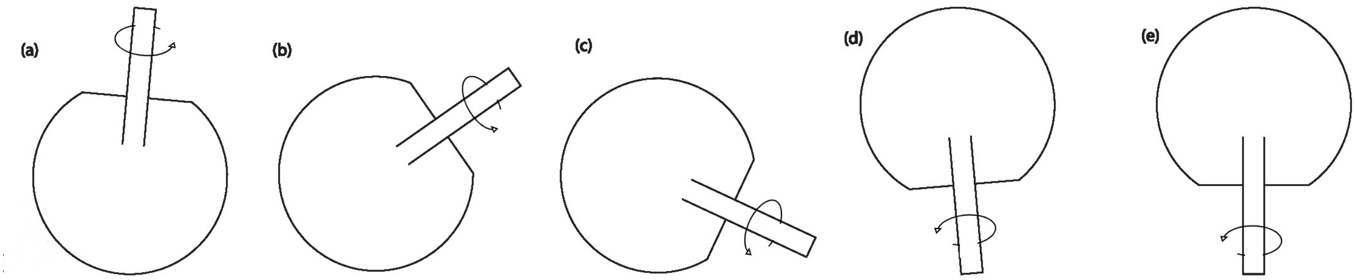


Рис. 2: опрокидывание китайского волчка

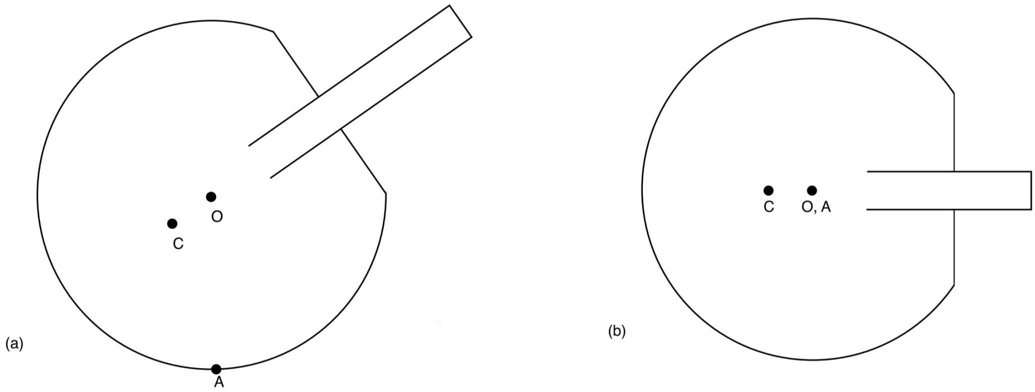


Рис. 3: (a) вид сбоку; (b) вид сверху

Решение

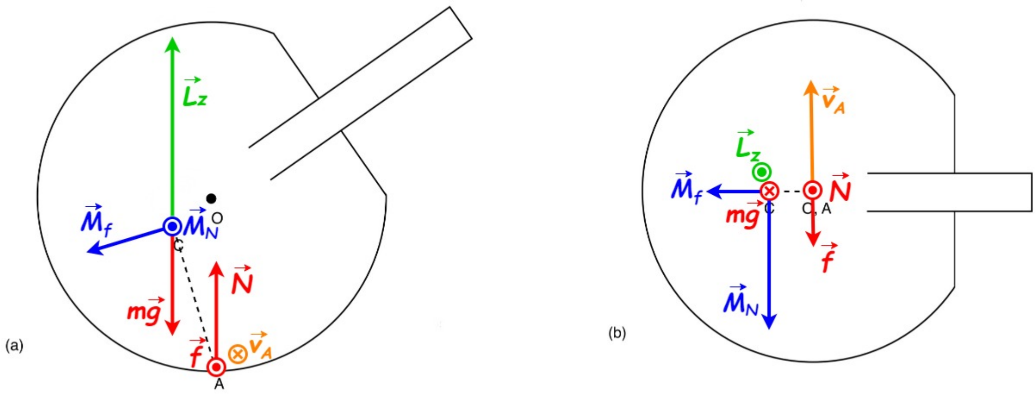
1. 

Рис. 4: (a) вид сбоку *(4 балла)*; (b) вид сверху *(4 балла)*

2. Как видно из рисунка, в любом промежуточном положениии волчка будет существовать составляющая момента силы трения $\vec{M}_f$, направленная вертикально вниз *(1 балл)*

3. Именно она будет изменять вертикальную составляющую момента импульса $\vec{L}_z$, пока та не поменяет направление, то есть пока волчок не перевернется (встанет на ножку) *(2 балла)*

4. Модуль момента импульса, очевидно, уменьшится (вращение замедлится). За счет момента момента силы трения волчок переворачивается. *(1 балл)*

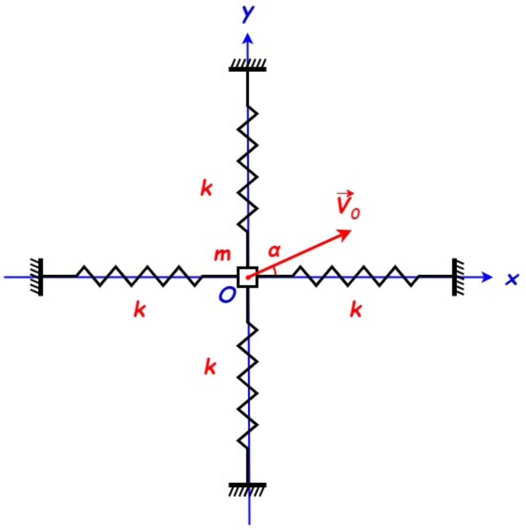
Задание 2. Четыре пружины

Автор: Нурсагатов М.

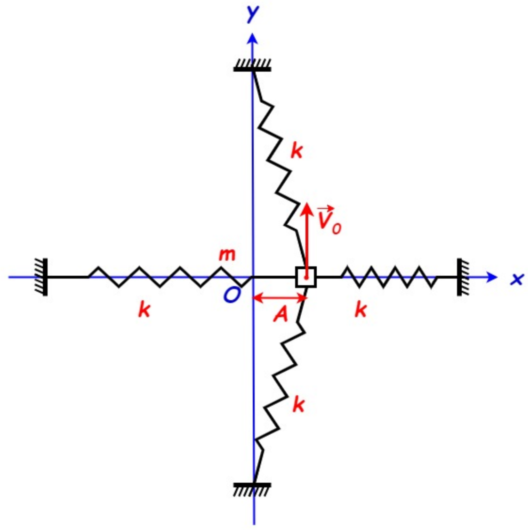
В системе, указанной на рисунках, все пружины одинаковые и имеют жесткость k. В положении равновесия пружины не растянуты. Масса тела равна m. Найти период малых колебаний тела, уравенения его движения $x(t)$ и $y(t)$. Запишите уравнение траектории $y(x)$ и схематически изобразите ее, если в начальный момент:

a) телу сообщили скорость V_0, направленную под углом α к оси Ox;

b) тело сдвинули вдоль оси Ox на расстояние A и сообщили скорость V_0 вдоль оси Oy.



a)



b)

Размерами тела можно пренебречь. Поле тяжести отсутствует. При малых колебаниях можно пренебречь смещением пружины в направлении, перпендикулярном ее оси.

Решение

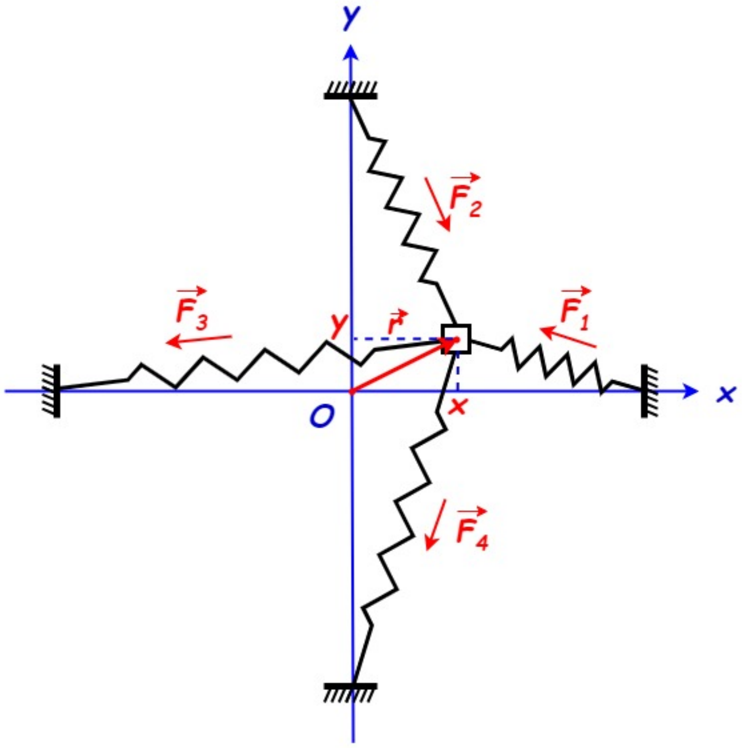


Рис. 1

1. Найдем новые длины пружин l_1, l_2, l_3, l_4. В силу малости колебаний $x, y \ll l_0$ можно считать

$$l_1 \approx l_0 - x$$

(0.25 балла)

$$l_2 \approx l_0 - y$$

(0.25 балла)

$$l_3 \approx l_0 + x$$

(0.25 балла)

$$l_4 \approx l_0 + y$$

(0.25 балла)

2. Распишем силы, действующие на тело, при его смещении из положения равновесия на радиус-вектор $\vec{r}\,(x, y)$. Вновь пользуясь малостью колебаний, запишем

$$\vec{F_1} \approx k(l_1 - l_0)\hat{x} = -kx \cdot \hat{x}$$

(0.25 балла)

$$\vec{F}_2 \approx k(l_2 - l_0)\hat{y} = -ky \cdot \hat{y}$$

(0.25 балла)

$$\vec{F}_3 \approx -k(l_3 - l_0)\hat{x} = -kx \cdot \hat{x}$$

(0.25 балла)

$$\vec{F}_4 \approx -k(l_4 - l_0)\hat{y} = -ky \cdot \hat{y}$$

(0.25 балла)

3. Наконец, запишем уравнение движения тела

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -2k(x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y}) = -2k\vec{r},$$

$$\vec{a} + \frac{2k}{m}\vec{r} = 0,$$

   или, проектируя на оси,

$$a_x + \frac{2k}{m}x = 0, \;\; a_y + \frac{2k}{m}y = 0.$$

(1 балл)

4. Отсюда видно, что для обоих случаев a) и b) циклическая частота и период колебаний будут одинаковыми и равными

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$$

(1 балл)

   (a) Амплитуду A и B колебаний вдоль осей Ox и Oy можно найти из известного соотношения амплитуды смещения и амплитуды скорости

$$A = \frac{V_{0x}}{\omega} = \frac{V_0 \cos\alpha}{\omega}$$

(0.5 балла)

$$B = \frac{V_{0y}}{\omega} = \frac{V_0 \sin\alpha}{\omega}$$

(0.5 балла)

Движение начинается из положения равновесия, что соответствует закону синуса.

$$\boxed{x = A\sin(\omega t)}$$

(1 балл)

$$\boxed{y = B\sin(\omega t)}$$

(1 балл)

Отсюда

$$\boxed{y = x\tan\alpha} -$$

(1 балл)

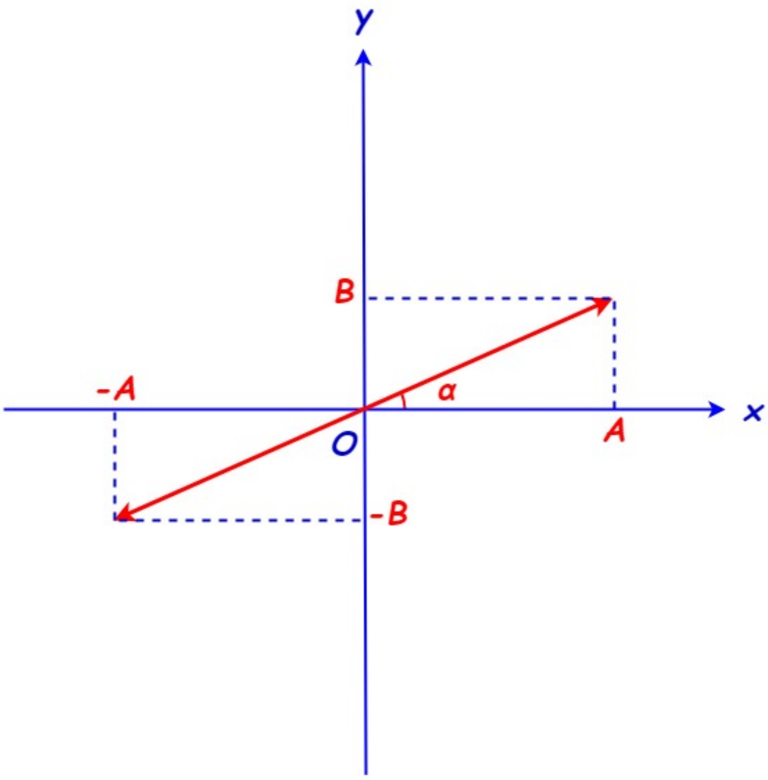


Рис. 2: случай а)

(b) Амплитуда A колебаний вдоль оси Ox задана, амплитуда B колебаний вдоль оси Oy равна

$$B = \frac{V_0}{\omega}$$

(0.5 балла) Колебания вдоль оси Ox начинаются из точки максимального смещения, что соответствует закону косинуса, вдоль оси Oy — из точки нулевого смещения, что соответствует закону синуса.

$$\boxed{x = A\cos(\omega t)}$$

(1 балл)

$$\boxed{y = B\sin(\omega t)}$$

(1 балл)

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1} -$$

(1.5 балла)

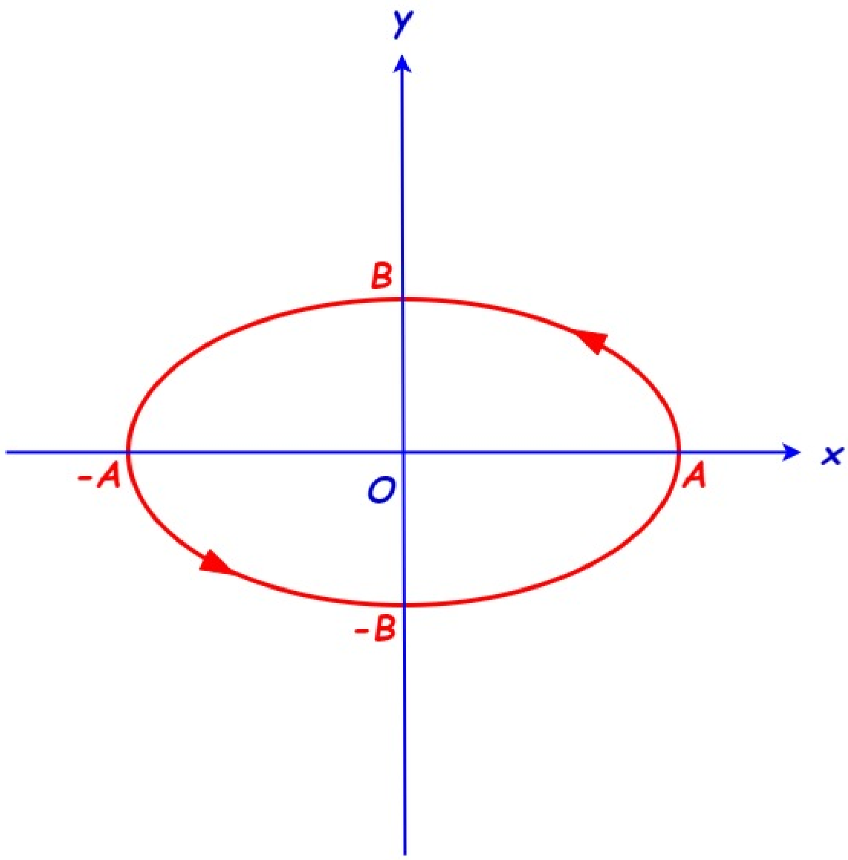


Рис. 3: случай b)

Задание 3. Прыгающий кусочек

Автор: Гриднев И.

Вертикальный цилиндрический теплоизолированный сосуд разделен на две части невесомым теплоизолирующим поршнем. Обе части сосуда заполнены идеальным одноатомным газом при равной начальной температуре. От верхней стенки сосуда отвалился кусочек неизвестной массы и начал абсолютно упруго “прыгать” на поршне. Когда релаксация закончилась и система пришла в равновесие, выяснилось, что поршень оказался на том же уровне, где был изначально. В каком соотношении поршень делит сосуд?

Решение

1. Уравнения Менделеева-Клайперона для газов над и под поршнем соответственно (индексы верхний и нижний) для начальных состояний газов:

$$PV_B = \nu_B RT$$

(1 балл)

$$PV_H = \nu_H RT$$

(1 балл)

2. После устаНовлеНия равНовесия:

$$\left(P - \frac{mg}{S}\right) V_B = \nu_B R \left(T + \Delta T\right)$$

(2 балла)

$$\left(P + \frac{mg}{S}\right) V_H = \nu_H R \left(T + \Delta T_H\right)$$

(2 балла)

3. Во время релаксации удары об поршень будут порождать в газах возмущения, подобные звуковым волнам, которые, в процессе затухания, передадут свою энергию. Запишем закон сохранения энергии:

$$mgh_B = \frac{3}{2} R \left(\nu_B \Delta T_B + \nu_H \Delta T_H\right)$$

(3 балла)

4. Решаем составленную систему:

$$\boxed{\frac{h_H}{h_B} = \frac{5}{3}}$$

(3 балла)

Задание 4. ЖЕСТКИЙ стержень

Автор: Шишкин ИА.

На гладкой горизонтальной поверхности в вертикальном положении покоится жесткий однородный стержень длиной L и массой m. В какой-то момент стержень аккуратно вывели из состояния равновесия, и он без начальной скорости начинает падать под действием силы тяжести. Вашей задачей является определение ускорения центра масс стержня в момент, когда угол между стержнем и вертикалью равен α.

Решение

1. Второй закон Ньютона:

$$ma = mg - N$$

(1 балл)

2. для вращательного движения

$$I\epsilon = N\frac{L}{2}\sin\alpha$$

(1 балл)

Момент инерции стержня

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

(1 балл)

Отсюда

$$\epsilon = \frac{6(g-a)\sin\alpha}{L}$$

(1 балл)

3. Соотношение между скоростью центра масс и углом

$$V\mathrm{d}t = \frac{L}{2}(\cos\alpha - \cos(\alpha + \mathrm{d}\alpha)) = -\frac{L}{2}\mathrm{d}(\cos\alpha) = \frac{L}{2}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha$$

(1 балл)

$$\mathrm{d}\alpha = \omega\mathrm{d}t,$$

$$V = \omega\frac{L}{2}\sin\alpha$$

(1 балл)

Дифференцируя обе части уравнения, получаем

$$a = \epsilon\frac{L}{2}\sin\alpha + \omega^2\frac{L}{2}\cos\alpha$$

(1 балл)

4. Закон сохранения энергии:

$$mg\frac{L}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

(1 балл)

$$mgL(1-\cos\alpha) = m\frac{L^2}{12}\omega^2(1+3\sin^2\alpha),$$

$$\omega^2 = \frac{12g(1-\cos\alpha)}{L(1+3\sin^2\alpha)}$$

(1 балл)

5. Отсюда

$$\boxed{a = g\cdot\frac{3\sin^2\alpha + \frac{6(\cos\alpha-\cos^2\alpha)}{(1+3\sin^2\alpha)}}{(1+3\sin^2\alpha)}}$$

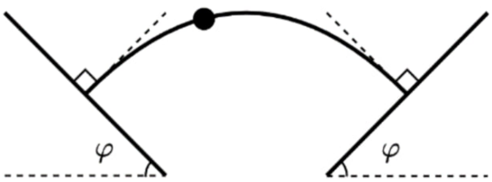
(3 балла)

Задание 5. Симметричные плиты

Автор: Еркебаев А.

Когда упругий мячик подпрыгивает вертикально над горизонтальной поверхностью, его усреднённая по времени кинетическая энергия $\bar{K_0}$ вдвое больше потенциальной энергии $\bar{\Pi}_0$.

Теперь мяч подпрыгивает между двумя симметричными плитами, расположенные под углами φ к горизонту. Если усреднённая за большой промежуток времени кинетическая энергия мяча равна $\overline{\text{K}}$, а потенциальная энергия мячика относительно его наинизшего положения $\overline{\Pi}$, найдите величину $\alpha = \overline{\text{K}}/\overline{\Pi}$ как функцию угла φ.



Решение

Пусть скорость мяча прямо перед удар о плиту равна v_0. В этом положении потенциальная энергия нулевая, так что полная механическая энергия мяча равна кинетической энергии в этом положении:

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

(1 балл)

Для дальнейшего решения рассмотрим случай, когда $\varphi = 0$. Это есть тривиальный случай подпрыгивания мяча на горизонтальной плите. Рассчитаем отношение усреднённых по времени кинетической энергии $_\text{в}$ к потенциальной в этом случае. Зависимости скорости мяча v и высоты h от времени

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 - gt, \\ h(t) &= v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2v_0}{g}$$

(1+1 балл)

и тогда усреднённая кинетическая энергия равна

$$\overline{K} = \frac{1}{T}\int_0^T K dt = \frac{g}{2v_0}\int_0^{2v_0/g} \frac{m}{2}(v_0 - gt)^2 dt = \frac{mv_0^2}{3}$$

(2 балла)

Аналогично, посчитаем среднюю потенциальную энергию.

$$\overline{\Pi} = \frac{g}{2v_0}\int_0^{2v_0/g} mg\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)dt = \frac{g}{2v_0}\frac{mv_0^3}{3g} = \frac{mv_0^2}{6}$$

(2 балла)

То есть,

$$\bar{\Pi} = 2\bar{K}.$$

Теперь применим результат к нашей задаче: горизонтальная составляющая скорости мяча $v_0 \sin\varphi$ постоянна, и тогда соответствующая этой компоненте кинетическая энергия

$$K_\Gamma = \frac{mv_0^2 \sin^2\varphi}{2}$$

(2 балла)

тоже не изменяется. Обозначая K_B как «вертикальную» компоненту кинетической энергии, можно написать

$$K_0 = \bar{K_\Gamma} + \bar{K_B} + \bar{\Pi}$$

(2 балла)

Отсюда

$$\boxed{\alpha = \frac{1 + 3\tan^2\varphi}{2}}$$

(2 балла)

Задание 6. Паркур - это жизнь

Автор: Шишкин А.

Железнодорожный вагон массы MM может катиться без трения по прямому горизонтальному пути, как показано. NN человек, каждый массой mm, изначально стоят на неподвижном автомобиле.

1. N человек одновременно бегут к одному концу вагона; их относительная скорость прямо перед тем, как они спрыгнут (все одновременно) равна $V_{\text{отн}}$. Вычислите скорость вагона после того, как все N человек спрыгнули одновременно.

2. N человек сбегают с вагона один за другим (только один человек бежит за раз), каждый достигает скорости $V_{\text{отн}}$ относительно вагона непосредственно перед прыжком. Найдите выражение для конечной скорости вагона.

3. В каком случае 1. или 2. вагон достигает большей скорости?

Решение

1. Так как внешние горизонтальные силы отсутствуют, то центр масс системы, состоящей из N человек и вагона, будет неподвижным. Введя ось x, которая сонаправлена направлению движения вагона, мы получаем

$$x = \frac{Mx_M + Nmx_m}{M + Nm}$$

(1 балл)

$$\dot{x} = 0 = M\dot{x}_M + Nmx_m\dot{x}_m$$

(1 балл)

где $\dot{x}_M$ и $\dot{x}_m$ скорости вагона и человека перед прыжком в лабораторной СО соответственно. Очевидно, что $\dot{x}_M = V_M$, также из относительности движения $\dot{x}_m = V_M - V_{\text{отн}}$, получаем

$$MV_{\text{ваг}} + Nm(V_{\text{ваг}} - V_{\text{отн}}) = 0$$

(1 балл)

что дает нам

$$\boxed{V_{\text{ваг}} = \frac{NmV_{\text{отн}}}{M + Nm}}$$

(1 балл)

2. Рассмотрим случай, когда количество человек на вагоне уменьшается с n до $(n-1)$. Пусть V_n это скорость вагона, когда на нем находится n человек. Полный импульс системы, когда на вагоне находится n человек:
$$P_n = MV_n + nmV_n$$
(1 балл)
Когда n-й человек прыгает с вагона со скоростью $V_{\text{отн}}$ относительно вагона, на вагоне остается $n-1$ человек. Полный импульс системы, состоящей из вагона с $n-1$ человек на нем и прыгающего человека
$$P_{n-1} = MV_{n-1} + (n-1)mV_{n-1} + m(V_{n-1} - V_{\text{отн}})$$
(1 балл) Закон сохранения импульса $P_{n-1} = P_n$
$$(M+nm)V_n = (M+nm)V_{n-1} - mV_{\text{отн}}$$
(1 балл)
Далее,
$$V_{n-1} = V_n + \frac{mV_{\text{отн}}}{M+nm}$$
(1 балл)
Наконец,
$$V_{n-s} = V_n + \sum_{i=1}^{s} \frac{mV_{\text{отн}}}{M+(n-i+1)m}$$
(1 балл)
При $n = N$, $V_N = 0$ в начале (вагон неподвижен), для $s = N$,
$$\boxed{V_{\text{ваг}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{mV_r}{M+(N-i+1)m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{mV_{\text{отн}}}{M+nm}}$$
(2 балла)

3. Сравним конечные скорости первого и второго случая
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{M+nm} > \frac{N}{M+Nm}$$
В случае $\boxed{b}$ вагон приобретет большую скорость. *(1 балл)*

Задание 7. Вовремя

Автор: Бисимби Д.

С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолёт на экваторе, чтобы при всех перелётах локальные времена в пункте отправки и в пункте посадки были одинаковые? (Считать, что локальное время всегда определяется положением солнца в небе при наблюдении в том месте.)

Решение

1. Солнце двигается на небе из за вращения Земли вокруг своей оси (будем пренебрегать вращенеием Земли вокруг Солнца). *(2 балла)*

2. Если самолёт будет двигаться против вращения Земли со скоростью, равной скорости вращения Земли, то в системе отсчёта Солнца самолёт практически застынет (направление может быть ещё написано "на запад"). *(4 балла)*

3. Так относительно самолёта Солнце не сдвинется на небе, и все посадки и отправки будут совершаться в одно и то же локальное время. *(3 балла)*

4. Скорость движения поверхности Земли найдётся через ее угловую скорость и радиус. Период обращения земли вокруг своей оси T= 24 часа. $v = \frac{2\pi}{T} \cdot R_{earth} = 465$ *(2 балла)*
   Приравнивание угловой скорости самолёта к угловой скорости земли с указанием направления движения даёт полный балл.

Задание 8. Две капли

Автор: Нурсагатов М.
Абитуриент Евлампий, не обратившись заранее к Елизавете из Lever Tutoring, плохо сдал экзамены и написал некачественные эссе, в конце концов не поступив в свой университет мечты.
Увидев «rejected», он начал плакать – и в этот момент две сферические капли слез радиусом $r = 100$ мкм, находящиеся на абсолютно несмачиваемой поверхности, коснулись друг друга, объединились в сферическую каплю большего размера, которая внезапно подскакнула. Найти начальную скорость v капли, если только $k = 0,06$ часть от разности поверхностной энергии переходит в кинетическую.
Плотность слезы $\rho \approx 1000$ кг/м³, поверхностное натяжение $\sigma \approx 7,27 \cdot 10^{-2}$ Дж/м^2.

Решение

1. Найдем радиус R образовавшейся капли. Из сохранения объема

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

(1 балл)

$$R = 2^{1/3} r$$

(1 балл)

2. Поврехностная энергия системы до объединения капель

$$W_1 = 2 \cdot \sigma \cdot 4\pi r^2 = 8\pi\sigma r^2$$

(2 балла)

после объединения

$$W_2 = \sigma \cdot 4\pi R^2 = 2^{2/3} \cdot 4\pi\sigma r^2$$

(2 балла)

3. Кинетическая энергия образовавшейся капли

$$K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot v^2 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 v^2$$

(2 балла)

4. Закон сохранения энергии

$$K = k(W_1 - W_2)$$

(2 балла)

$$\boxed{v = \sqrt{3(2 - 2^{2/3})\frac{k\sigma}{\rho r}}}$$

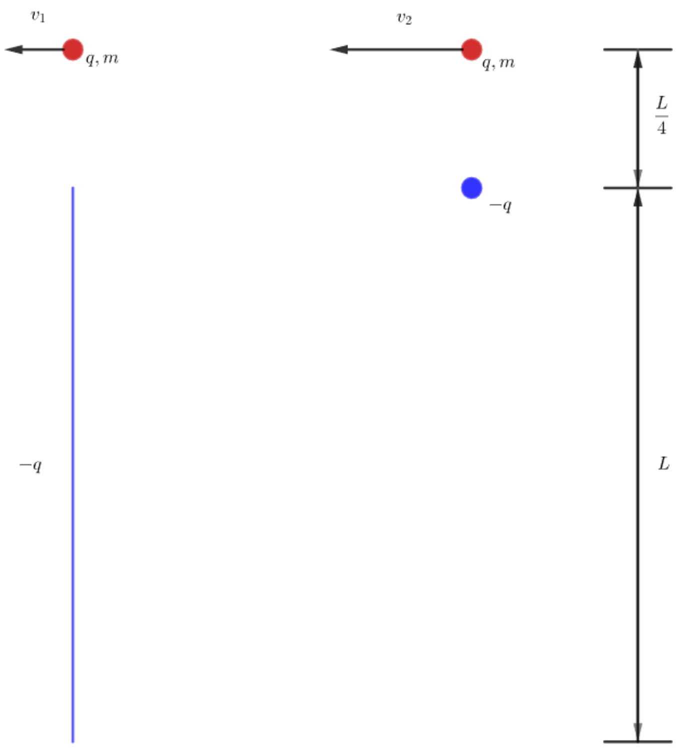
(2 балла)

Шестой раунд

Задание 1. И причем здесь Эллипс?

Автор: Чалый М.

В первом опыте заряду величиной q и массой m, находящемуся на расстоянии $\frac{L}{4}$ от закрепленного стержня длиной L и зарядом $-q$, сообщают некоторую скорость v_1 перпендикулярно этому стержню. В результате подвижный заряд совершает движение по замкнутой кривой с постоянной скоростью. Во втором опыте весь заряд стержня сосредоточили в его верхнем конце, а подвижному заряду сообщили некоторую другую скорость v_2 в том же направлении. Оказалось, что траектория движения последнего при этом не изменилась. Определите v_1, v_2, а также отношение $\frac{T_1}{T_2}$ периодов обращения в первом и во втором случаях.



Указание

Длину эллипса можно выразить так:

$$C \approx 4a \cdot 1.378,$$

где a - это большая полуось эллипса.

Решение

1. Так как скорость подвижного заряда в первом опыте не изменялась, то это означает, что он двигался по эквипотенциальной поверхности в плоскости рисунка. Для однородно заряженного стержня эквипотенцильные поверхности представляют собой эллипсоиды вращения с фокусами в концах стержня. Поэтому траекторией движения заряда является эллипс. Его большая полуось $a = \frac{3L}{4}$, а половина расстояния между фокусами $c = \frac{L}{2}$. Значит, меньшая полуось $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{5}L}{4}$.

2. Теперь можно найти радиус кривизны эллипса в начальной точке движения

$$R = \frac{b^2}{a} = \frac{5L}{12}$$

(1 балл)

3. Определим силу, с которой взаимодействует заряд со стержнем в этот момент.

$$F_1 = \int\limits_{\frac{L}{4}}^{\frac{5L}{4}} \frac{kqdq}{x^2} = \frac{kq^2}{L} \int\limits_{\frac{L}{4}}^{\frac{5L}{4}} \frac{dx}{x^2} = \frac{16kq^2}{5L^2}$$

(3 балла)

4. По второму закону Ньютона

$$F_1 = \frac{mv_1^2}{R}$$

Откуда

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{4kq^2}{3mL}}}$$

(1 балл)

5. Аналогично для второго опыта

$$F_2 = \frac{16kq^2}{L^2}$$

$$F_2 = \frac{mv_2^2}{R}$$

Откуда

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{20kq^2}{3mL}}}$$

(1 балл)

6. Используем третий закон Кеплера для нахождения T_1

$$\frac{T_1^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{kq^2}$$

$$T_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi\sqrt{\frac{mL^3}{kq^2}}$$

(2 балла)

7. Для определения T_2 достаточно найти длину эллипса C

$$C = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\theta}d\theta = 3E\left(\frac{2}{3}\right)L$$

(2 балла)

8. Тогда

$$T_2 = \frac{C}{v_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}E\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{mL^3}{kq^2}}$$

(1 балл)

9. Итого

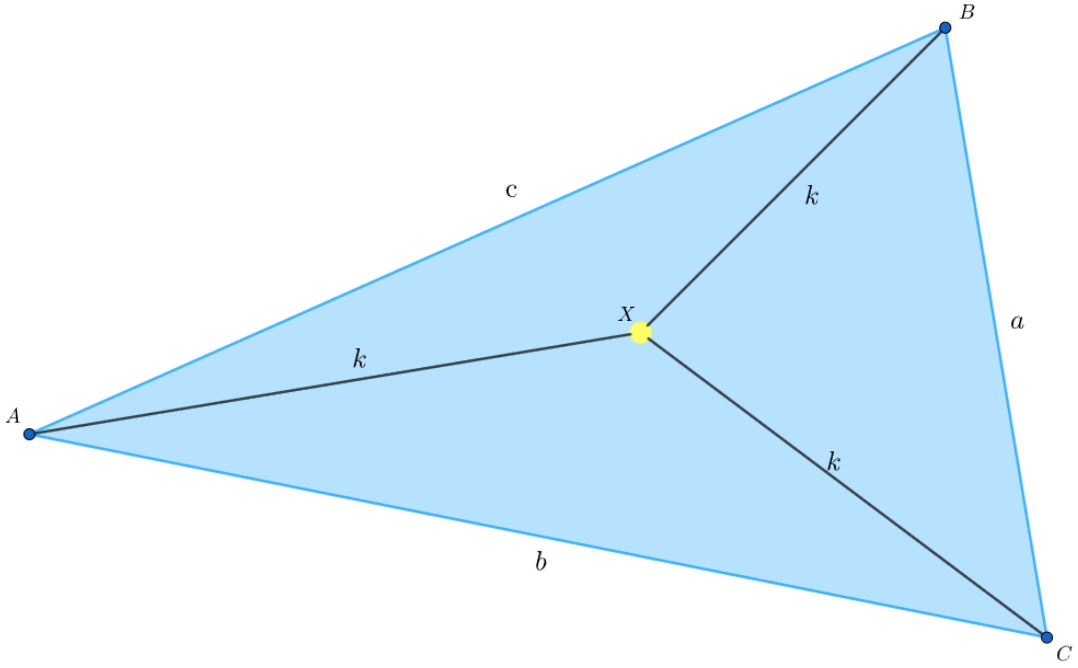
$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{5}\pi}{2E\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 2,55}$$

(1 балл)

Задание 2. Покой нам только снится...

Автор: Чалый М.

На горизонтальной плоскости дан треугольник ABC со сторонами a, b и c. К каждой его вершине одним своим концом прикреплена резинка жесткостью k и длиной в недеформированном состоянии $l \ll a, b, c$. Другие их концы присоединили к небольшому шарику массой m. Коэффициент трения между ним и плоскостью равен μ.
1. Система пришла в равновесие, а шарик оказался в точке X. Определите расстояния AX, BX и CX, если $\mu = 0$.
2. Пусть теперь $\mu \neq 0$. Определим область C, состоящую из тех и только тех точек плоскости S, что шарик помещенный в S может находиться в состоянии покоя. Опишите область C и найдите её площадь.



Решение

1. Так как скорость подвижного заряда в первом опыте не изменялась, то это означает, что он двигался по эквипотенциальной поверхности в плоскости рисунка. Для однородно заряженного стержня эквипотенцильные поверхности представляют собой эллипсоиды вращения с фокусами в концах стержня. Поэтому траекторией движения заряда является эллипс. Его большая полуось $a = \frac{3L}{4}$, а половина расстояния между фокусами $c = \frac{L}{2}$. Значит, меньшая полуось $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{5}L}{4}$.

2. Теперь можно найти радиус кривизны эллипса в начальной точке движения

$$R = \frac{b^2}{a} = \frac{5L}{12}$$

(1 балл)

3. Определим силу, с которой взаимодействует заряд со стержнем в этот момент.

$$F_1 = \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{5L}{4}} \frac{kqdq}{x^2} = \frac{kq^2}{L} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{5L}{4}} \frac{dx}{x^2} = \frac{16kq^2}{5L^2}$$

(3 балла)

4. По второму закону Ньютона

$$F_1 = \frac{mv_1^2}{R}$$

Откуда

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{4kq^2}{3mL}}}$$

(1 балл)

5. Аналогично для второго опыта

$$F_2 = \frac{16kq^2}{L^2}$$

$$F_2 = \frac{mv_2^2}{R}$$

Откуда

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{20kq^2}{3mL}}}$$

(1 балл)

6. Используем третий закон Кеплера для нахождения T_1

$$\frac{T_1^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{kq^2}$$

$$T_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi\sqrt{\frac{mL^3}{kq^2}}$$

(2 балла)

7. Для определения T_2 достаточно найти длину эллипса C

$$C = 4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\theta} d\theta = 3E\left(\frac{2}{3}\right)L$$

(2 балла)

8. Тогда

$$T_2 = \frac{C}{v_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}E\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{mL^3}{kq^2}}$$

(1 балл)

9. Итого

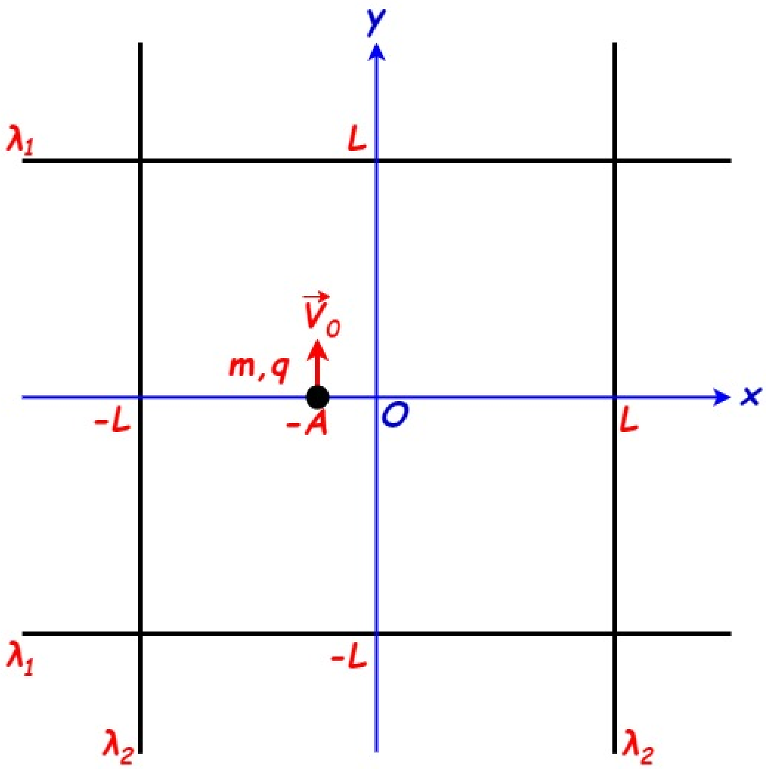
$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{5}\pi}{2E\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 2,55}$$

(1 балл)

Задание 3. Необычный узор

Автор: Нурсагатов М.

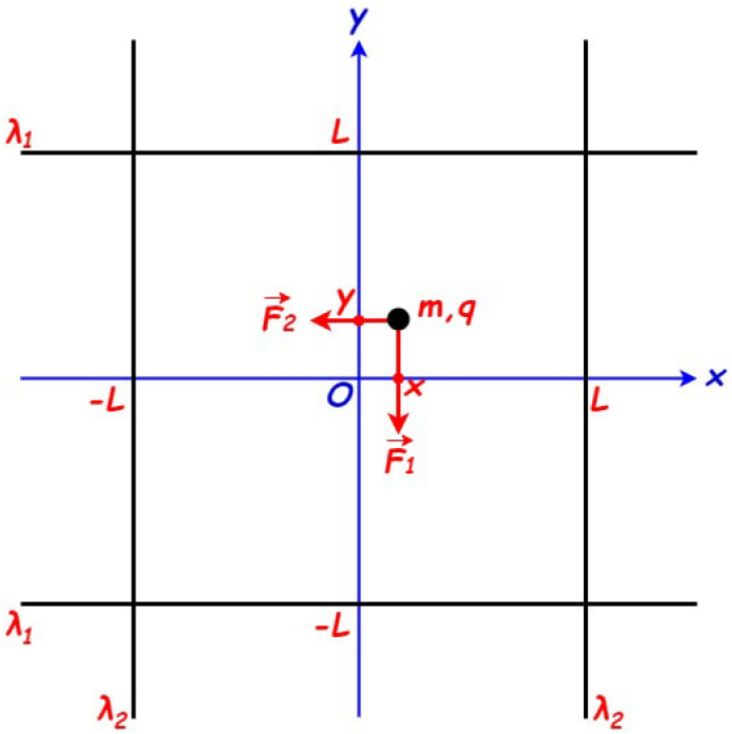
Четыре бесконечные нити, пересекаясь, образуют квадрат со стороной $2L$. Горизонтальные нити заряжены положительным линейным зарядом λ_1, вертикальные - положительным зарядом λ_2. В начальный момент маленький положительно заряженный шарик массой m и зарядом q расположили как показано на рисунке и сообщили скорость v_0. Длину A считайте известной. Запишите уравнение движения шарика в проекциях на координатные оси $x(t)$ и $y(t)$. Качественно изобразите траекторию движения шарика для случаев а) $\lambda_1 = \lambda_2$; б) $\lambda_1 = 4\lambda_2$; в) $\lambda_1 = \frac{4}{9}\lambda_2$. Считать, что шарик может двигаться только в плоскости рисунка. Смещения считать малыми.



Указание

$$(1+x)^n \approx 1+nx \text{ при } x \ll 1.$$

Решение



1. Найдем распределение электрического поля в пространстве. Поле бесконечной заряженной нити вычисляется по формуле

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

(1 балл)

2. Суммарное поле горизонтальных нитей равно

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0(L+y)}\hat{y} - \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0(L-y)}\hat{y} \approx -\frac{\lambda_1}{\pi\epsilon_0 L^2}y\cdot\hat{y}$$

(1 балл)

вертикальных:

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0(L+x)}\hat{x} - \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0(L-x)}\hat{x} \approx -\frac{\lambda_2}{\pi\epsilon_0 L^2}x\cdot\hat{x}$$

(1 балл)

3. Силы, действующие на тело, при его смещении из положения равновесия, равны

$$\vec{F}_1 = q\vec{E}_1 = -\frac{\lambda_1 q}{\pi\epsilon_0 L^2} y \cdot \hat{y}$$

(0.5 баллов)

$$\vec{F}_2 = q\vec{E}_2 = -\frac{\lambda_2 q}{\pi\epsilon_0 L^2} x \cdot \hat{x}$$

(0.5 баллов)

4. Запишем уравнение движения тела

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{\lambda_1 q}{\pi\epsilon_0 L^2} y \cdot \hat{y} - \frac{\lambda_2 q}{\pi\epsilon_0 L^2} x \cdot \hat{x},$$

5. или, проектируя на оси и преобразовывая,

$$a_y + \frac{\lambda_1 q}{\pi\epsilon_0 m L^2} y = 0, \ a_x + \frac{\lambda_2 q}{\pi\epsilon_0 m L^2} x = 0$$

(1 балл)

Отсюда находим циклические частоты

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 q}{\pi\epsilon_0 m L^2}}, \ \omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 q}{\pi\epsilon_0 m L^2}}$$

(1 балл)

6. Амплитуда A колебаний вдоль оси Ox задана, амплитуда B колебаний вдоль оси Oy равна

$$B = \frac{V_0}{\omega_1}$$

(0.5 баллов)

7. Колебания вдоль оси Ox начинаются из точки максимального (отрицательного) смещения, что соответствует закону косинуса, вдоль оси Oy — из точки нулевого смещения, что соответствует закону синуса.

$$\boxed{y = B\sin(\omega_1 t)}$$

(1 балл)

$$\boxed{x = -A\cos(\omega_2 t)}$$

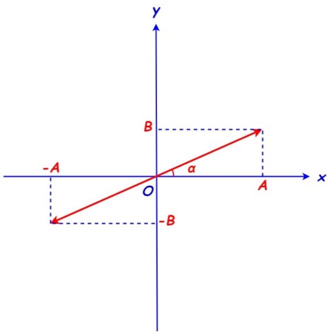
(1 балл)

8. Мы получили разночастотные взаимно перпендикулярные колебания. При определённых отношениях частот этих колебаний, сумма колебаний дает нам так называемые "фигуры Лиссажу". Из формул (9) и (10) получаем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

(0.5 баллов)

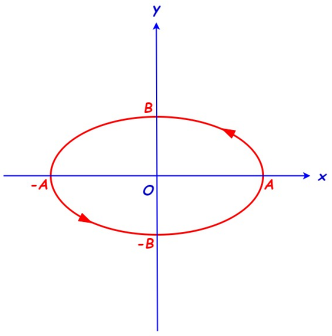
a)



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$$

(1 балл)

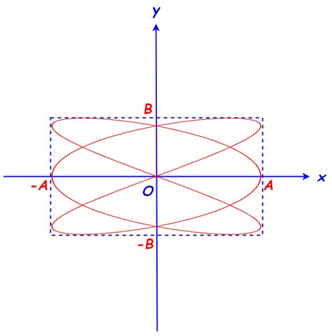
b)



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{2}$$

(1 балл)

c)



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3}{2}$$

(1 балл)

Задание 4. Угловая амплитуда

Автор: Еркебаев А.

Шарик массой $m = 100$ г подвешен на длинной нити, которая протянута через небольшое отверстие в столе. В изначальном положении шарик находится под поверхностью стола на расстоянии $L_0 =$ 1 м от него, и колеблется с небольшой угловой амплитудой $\alpha_m = 10°$. Затем нить начали очень медленно протягивать вдоль отверстия вверх, пока шарик не подняли до расстояния $L = 25$ см от поверхности стола. Какова новая амплитуда колебаний, и какую работу A совершила нить?

Решение

Рассмотрим наинизшее положение шарика, в таком случае его скорость максимальна и равна:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgL_0(1 - cos\theta_0) \Rightarrow v_0^2 = 2gL_0(1 - cos\theta_0)$$

(1 балл)

Момент импульса шарика относительно отверстия для всех его наинизших положений при произвольном L сохраняется, и в таком случае:

$$mv_0L_0 = mvL$$

(1 балл)

Это справедливо, во-первых, потому, что сила натяжения нити всегда направлена к отверстию, а значит её вклада в изменение момента импульса нет, и, во-вторых, момент силы тяжести компенсируется в течение одного периода благодаря симметричности колебаний и достаточно медленного протягивания нити. Итак, комбинируя (1) и (2), можно рассчитать угловую амплитуду через закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(1 - cos\theta) \Rightarrow v^2 = 2gL(1 - cos\theta)$$

(1 балл)

$$cos\theta = 1 - \frac{L_0^3}{L^3}(1 - cos\theta_0)$$

(1 балл)

Изменение потенциальной энергии шарика равно:

$$\Delta\Pi = mg(L - L_0) = 0.750\text{Дж}$$

(3 балла)

А изменение его кинетической энергии составляет:

$$\Delta K = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = mgL_0\left(\frac{L_0^2}{L^2} - 1\right) = 0.228\text{Дж}$$

(3 балла)

Работа силы натяжения нити увеличивает полную механическую энергию шарика, поэтому окончательно получаем:

$$\boxed{A = \Delta\Pi + \Delta K = 0.978}$$

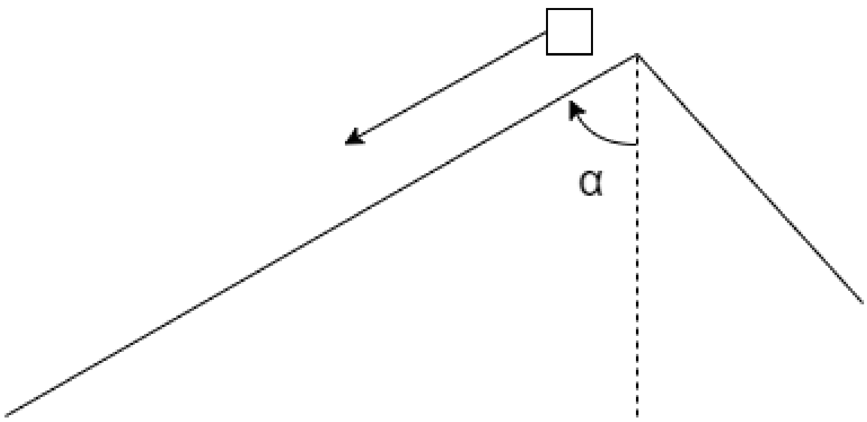
(2 балла)

Задание 5. Наурыз

Автор: Гриднев И.
Во время Наурыза фейерверк отклонился от ожидаемой траектории и взорвался точно в вершине двусторонней покатой крыши (крыша представляет собой двугранный угол) одного из городских домов. Известно, что перед взрывом снаряд полностью погасил свою скорость. В результате снаряд разделился на большое количество одинаковых кусочков, которые начали равномерно лететь во все стороны. Также в момент взрыва из точки попадания снаряда откололись кусочки черепицы и начали практически без трения и начальной скорости соскальзывать по обоим "направлениям"крыши. Через неизвестные времена t_1 и t_2 от момента взрыва снаряды фейерверка попали точно в эти кусочки черепицы соответственно с каждой из сторон. Известно, что $t_1^{-2} + t_2^{-2} = \frac{mg^2}{8E}$, где m - масса фейерверка, E - энергия взрыва. Определите угол раствора крыши *(то есть угол между двумя “плоскостями” крыши.)*

Решение

Докажем вспомогательный факт, что геометрическое место точек всех возможных положений кусочков черепицы через время t - окружность с диаметром $gt^2/2$ и верхней точкой в точке взрыва фейерверка.
Рассмотрим скатывание кусочка черепицы без начальной скорости по крыше, которая наклонена под углом α к вертикали:



Ускорение в проекции на плоскость крыши $g\cos(\alpha)$, следовательно, пройденное вдоль нее расстояние за время t равно $g\cos(\alpha)t^2/2$

1. Рассмотрим вертикальное падение:

$$AB = g\cos\alpha\frac{t^2}{2}$$

(1 балл)

$$AC = \frac{gt^2}{2}$$

(1 балл)

$$BAC = \alpha$$

(1 балл)

$$AB^2 = AQ^2 + BQ^2 = (g\cos\alpha\frac{t_1^2}{2})^2 = (g\cos^2\alpha\frac{t_1^2}{2})^2 + (v\cos\beta t_1)^2$$

(2 балла)

2.

$$g^2\frac{t_1^4}{4} = g^2\cos^2\alpha\frac{t_1^4}{4} + v^2t_1^2$$

(1 балл)

3.

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4v^2}{g^2t_1^2}$$

(1 балл)

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4v^2}{g^2t_1^2},\ \cos^2\gamma = 1 - \frac{4v^2}{g^2t_2^2}$$

(1 балл)

4.

$$\frac{mv^2}{2} = E_{\text{взрыв}}$$

(1 балл)

5.

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{8}{mg^2t_1^2}\cos^2\gamma = 1 - \frac{8E}{mg^2t_2^2}$$

(1 балл)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\gamma = 2 - \frac{8}{mg^2}\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2}\right)$$

(1 балл)

6.

$$\boxed{\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}}$$

(1 балл)

Задание 6. Надежда умирает последней

Автор: Чалый М.

В свободном космическом пространстве с челноком шарообразной формы радиуса R и общей массы M случилось несчастье: он израсходовал всё имеющееся топливо. Двигаясь со скоростью v_0, экипаж корабля обнаружил прямо по курсу на расстоянии $L \gg R$ космический мусор, столкновение с которым может привести к разрушению шаттла. В этот же момент челнок попал в направленный поток частиц массы $m \ll M$, двигающийся навтречу со скоростью u. Концентрация частиц в потоке n. Для защиты от такого ветра на борту находились два вида металлов, которыми можно было бы покрыть переднюю часть корабля. Опыты показали: при соударении частицы с альферанцием, она ненадолго прилипает к материалу, а затем отстаёт от него, соударение с капеллием является абсолютно упругим. Экипаж догадался, что с помощью ветра можно остановить шаттл раньше, чем тот окажется в облаке из мусора.

1. Помогите капитану выбрать такое покрытие альферанцием и капеллием, чтобы шансы команды на выживание были как можно выше.
2. Найдите минимальное начальное расстояние L_0, которое позволит людям остаться целыми.

Решение

1. Пусть некоторая площадь dS космического корабля покрыта альферанцием, тогда изменение импульса одной частицы составит $p_1 = m(u+v)$, где v – скорость шаттла. Если же эта площадь dS покрыта капеллием, то изменение имульса одной частицы вдоль направления движения будет равно $p_2 = 2m(u+v)\cos^2\alpha$, где $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ – угол, который составляет радиус-вектор, проведенный из центра шара к данной площадке, с вектором $\vec{v}$. Заметим, что $p_1 > p_2$, когда $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Тогда оптимальное покрытие, реализующие максимальные шансы команды на спасение, должно быть устроено следующим образом: центральный шаровой сегмент высотой $R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ покрыт капеллием, а оставшаяся часть полусферы – альферанцием. Найдём теперь силу, действующую на челнок. За малое время dt с альферанцием столкнётся количество частиц $dN_1 = \frac{1}{2}\pi n R^2 v dt$, их суммарное изменение импульса составит

$$dp_1 = dN_1 p_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 nmv(u+v)dt$$

(1 балл)

2. За это же время с кольцом капеллия радиуса $R\sin\alpha$ и толщиной $Rd\alpha$ вступит во взаимодействие $d^2N_2 = 2\pi n R^2 v \sin\alpha\cos\alpha d\alpha dt$ частиц, их суммарное изменение импульса составит

$$d^2p_2 = d^2N_2 p_2 = 4\pi R^2 nmv(u+v)\cos^3\alpha\sin\alpha d\alpha dt$$

(1 балл)

3. Интегрируя теперь от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, находим

$$dp_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d^2p_2 = \frac{1}{2}\pi R^2 nmv(u+v)dt$$

(1 балл)

4. Таким образом, результирующая сила сопротивления равна

$$F = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \pi R^2 nmv(u+v)$$

(1 балл)

5. Уравнение движения корабля

$$M\frac{dv}{dt} = -\pi R^2 nmv(u+v)$$

(1 балл)

Откуда

$$M\frac{dv}{u+v} = -\pi R^2 nmds$$

(1 балл)

Интегрированием полученного соотношения можно найти тормозной путь S

$$M\int\limits_{v_0}^{0} \frac{dv}{u+v} = -\pi R^2 nm \int\limits_{0}^{S} ds$$

(1 балл)

$$S = \frac{M}{\pi R^2 nm}\ln\left(1+\frac{v_0}{u}\right)$$

(1 балл)

То есть если $L > S$, то экипаж останется целым и невредимым, а в противном случае он рискует столкнуться с космическим мусором. Таким образом, $L_0 = S$.

6. Перепишем уравнение движения в виде

$$\frac{dv}{\frac{u^2}{4} - \left(\frac{u}{2}+v\right)^2} = \frac{\pi R^2 nm}{M}dt$$

(1 балл)

И проинтегрируем его

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{\frac{u^2}{4} - \left(\frac{u}{2}+v\right)^2} = \frac{\pi R^2 nm}{M}\int\limits_{0}^{t} dt$$

(1 балл)

$$\ln\left(\frac{u+v}{u+v_0}\frac{v_0}{v}\right)=\frac{\pi R^2 nmu\tau}{M}$$

(1 балл)

И тогда

$$\boxed{v=\frac{u}{\left(1+\frac{u}{v_0}\right)\exp\left(\frac{\pi R^2 nmu\tau}{M}\right)-1}}$$

(1 балл)

Задание 7. Такие разные силы ($k\&\sigma$)

Автор: Чалый М.

Шарнир C массой m соединяет два одинаковых стержня. Каждый имеет массу $\frac{3}{4}m$ и длину a. К другим концам стержней прикреплены маленькие колечки A и B массы m каждое, нанизанные на спицу и соединенные пружиной AB длиной $l_0=a\sqrt{2}$ в недеформированном состоянии. Кольца способны перемещаться вдоль спицы, не испытывая трения. Кроме того, внутри треугольника ABC находится плёнка из вещества, коэффициент поверхностного натяжения которого составляет σ. Систему предложили исследовать, увеличивая жесткость пружины k.

1. Оказалось, существует некоторое предельное значение k_1, что для любого $k\leqslant k_1$ положение, при котором длина пружины l много меньше a, является устойчивым положением равновесия. Найдите k_1.

2. Продолжая увеличивать жёсткость, обнаружили, что при некотором k_2 система имеет только одно устойчивое положение равновесия. Чему равно k_2?

3. Найдите все положения равновесия системы и исследуйте каждое из них на устойчивость для случаев:

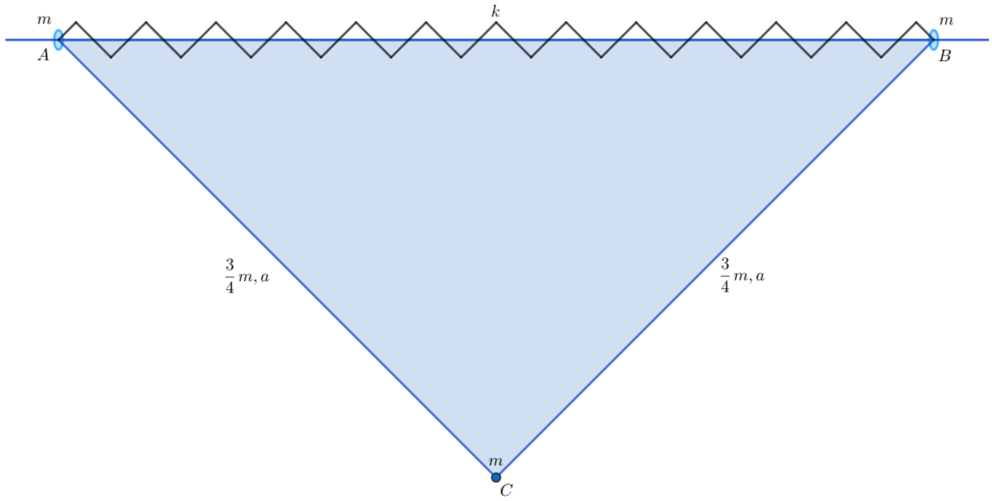
   (a)

   (b) $k<k_1$;

   (c) $k_1<k<k_2$;

   (d) $k_2<k$.

4. Пусть $k=3\sigma$. Определите, возле какого положения равновесия возможны гармонические колебания и найдите их период.



Указание

Наука доказала, что:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{при} \quad x \ll 1$$

.

Решение

1. Найдём энергию системы в тот момент, когда длина пружины равна $0 \leqslant x \leqslant 2a$. Она складывается из потенциальной энергии самой пружины и энергии двух свободных поверхностей вещества

$$W(x) = \frac{k\left(x - a\sqrt{2}\right)^2}{2} + \frac{\sigma x}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}$$

2. Запишем условие того, что $x = 0$ – устойчивое положение равновесия.

$$\frac{dW(0)}{dx} \geqslant 0$$

$$k \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

(1 балл)

То есть

$$\boxed{k_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}}.$$

(1 балл)

3. У функции $W(x)$ есть три экстремума

$$x_1 = a\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{k\sqrt{\sigma^2 + 2k^2} - \sigma^2}{\sigma^2 + k^2} a\sqrt{2}$$

$$x_3 = -\frac{k\sqrt{\sigma^2 + 2k^2} + \sigma^2}{\sigma^2 + k^2} a\sqrt{2}$$

4. Первый из них не зависит от соотношения между σ и k, а третий не удовлетворяет требованию $x > 0$. Найдём, при каком условии будет существовать неотрицательный второй экстремум.

$$x_2 \geqslant 0$$

$$k\sqrt{\sigma^2 + 2k^2} - \sigma^2 \geqslant 0$$

$$k \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

(1 балл)

5. Также определим, когда x_1 и x_2 совпадают.

$$x_1 = x_2$$

$$k\sqrt{\sigma^2 + 2k^2} = k^2 + 2\sigma^2$$

$$k = 2\sigma$$

(1 балл)

6. Исследуем теперь положения равновесия на устойчивость при различных значениях жесткости пружины.

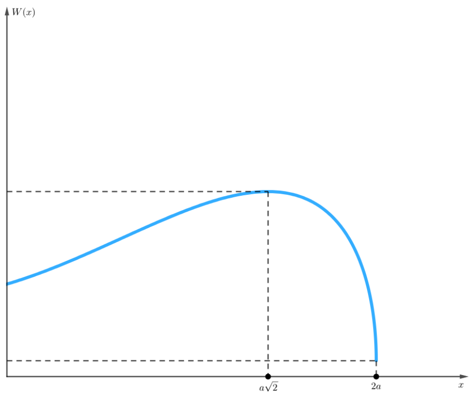
   Пусть $0 < k \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Тогда 0 и $2a$ – устойчивые ПР, x_1 – неустойчивое ПР. *(1 балл)*

   Пусть $\frac{\sigma}{\sqrt{2}} < k < 2\sigma$. Тогда x_2 и $2a$ – устойчивые ПР, 0 и x_1 – неустойчивые ПР. *(1 балл)*

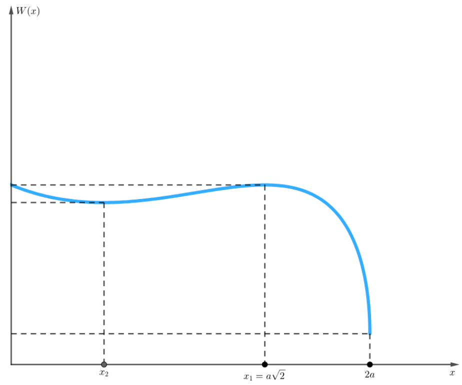
   Пусть $k = 2\sigma$. Тогда $2a$ – устойчивое ПР, 0 и $x_1 = x_2$ – неустойчивые ПР. *(1 балл)*

   Пусть, наконец, $k > 2\sigma$. Тогда 0 и x_2 – устойчивые ПР, x_1 и $2a$ – неустойчивые ПР. *(1 балл)*

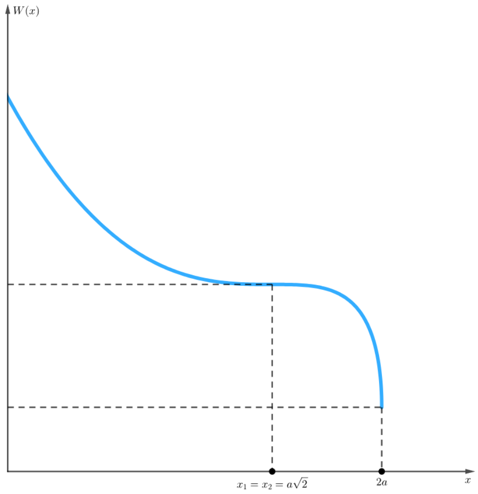
   Следовательно, $\boxed{k_2 = 2\sigma}$. *(1 балл)*



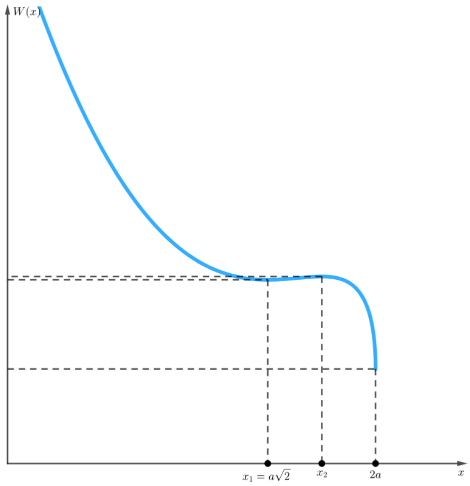
$0 < k < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$



$\frac{\sigma}{\sqrt{2}} < k < 2\sigma$



$k = 2\sigma$



$k > 2\sigma$

7. Для случая $k = 3\sigma$ гармонические колебания возможны только возле положения равновесия $x_1 = a\sqrt{2}$. Найдём потенциальную энергию системы при её малом смещении из этого положения

$$W = \frac{3\sigma x^2}{2} + \frac{\sigma(x + a\sqrt{2})}{2}\sqrt{4a^2 - (x + a\sqrt{2})^2} = \frac{3\sigma x^2}{2} + \sigma a^2\left(1 + \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}}$$

Используя приближение

$$\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

разложим W до второго порядка малости по x

$$W = \frac{3\sigma x^2}{2} + \sigma a^2\left(1 + \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2a^2}\right) = \sigma a^2 + \frac{\sigma x^2}{2}$$

(1 балл)

8. Определим кинетическую энергию системы. Если v – скорость колечка, то $v = \frac{1}{2}\dot{x}$. Кинетическая связь позволяет найти скорость шарнира: она также равна v. Тогда скорость центра масс каждого стержня равна $v_C = \frac{v}{\sqrt{2}}$, а их угловая скорость составляет $\omega = \frac{v\sqrt{2}}{l}$. Поэтому для кинетической энергии имеем

$$K = 3 \cdot \frac{mv^2}{2} + 2 \cdot \frac{Iw^2}{2} + 2 \cdot \frac{3mv_C^2}{8}$$

Здесь $I = \frac{ml^2}{16}$ – момент инерции стержня относительно его середины.

$$K = 2mv^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

По закону сохранения энергии

$$\dot{K} + \dot{W} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\sigma}{m}x = 0$$

А значит

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sigma}}}$$

(2 балла)

Задание 8. Четкий Назар

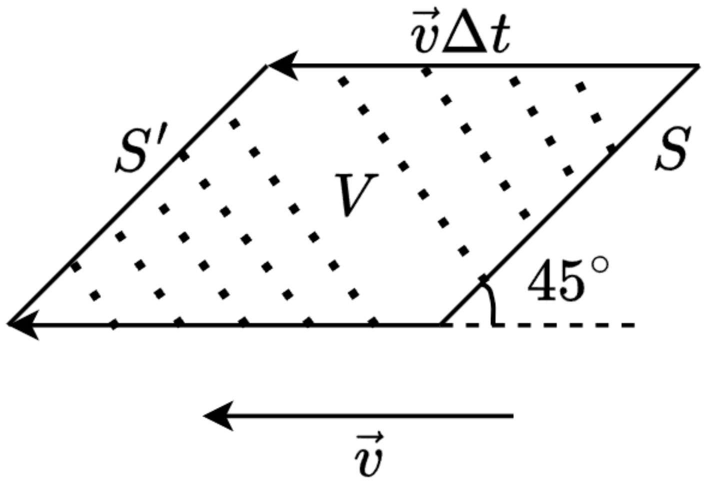
Автор: Горшунов Н.

Чёткий физик Назар решил протюнинговать своё радиоуправляемое авто, чтобы то могло ездить по стенам. Для этого он установил на его крышу спойлер площадью 200 см^2, наклонив его под углом

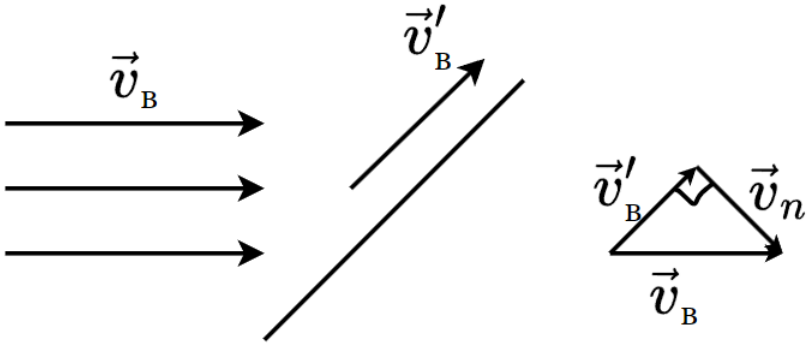
45 градусов к горизонту (при условии, что машина стоит на полу). Чтобы его план сработал, однако, необходимо, чтобы авто развило определённую скорость, а для этого ему нужен и более мощный двигатель. Оцените, какую минимальную скорость v нужно развить авто и какая минимальная дополнительная мощность N для этого нужна двигателю, чтобы затея сработала и машина смогла ехать параллельно горизонту по вертикальной стене? Назар предположил, что масса авто с новым двигателем – 500 г. Плотность воздуха – 1,27 кг/м^3. Чтобы машина могла ехать без проскальзывания, ей необходима прижимная сила не менее $0.5mg$. Вязкостью воздуха пренебречь. Считать, что сейчас мощности двигателя хватает ровно на то, чтобы машина смогла ехать на скорости v без спойлера.

Решение

1. Когда машина едет по вертикальной стене параллельно горизонту, сила тяжести действует параллельно стене и никак не влияет на вес машины на стену. Единственный источник, формирующий прижимную силу к стене - это спойлер. Оценить его влияние мы можем следующим образом: пусть машина едет со скоростью v в течение времени Δt. За это время спойлер S перемещается в положение S' и захватывает воздух объёмом $V = v\Delta t S_0 sin45°$, где S_0 - площадь спойлера.



2. Относительно машины этот воздух, до соприкосновения со спойлером, движется по горизонтали к нему, а после - параллельно спойлеру, меняя свой угол скорости. Точнее говоря, остается только проекция скорости воздуха на плоскость спойлера. А проекция, перпендикулярная ему и создает прижимную силу.



То есть воздух передает часть импульса машине. Для объёма V эта часть импульса создает силу:

$$F_\perp = \frac{m\Delta v_\perp}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot v\Delta t S_0 sin45^\circ \cdot vsin45^\circ}{\Delta t} = \frac{\rho S_0 v^2}{2}$$

(3 балла)

3. Эта сила в свою очередь имеет проекцию прижимающую машину к поверхности а значит:

$$F_\perp sin45^\circ = \frac{\rho S_0 v^2 sin45^\circ}{2} \geq 0.5mg$$

(3 балла)

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{2}mg}{\rho S_0}} \approx 11.79\text{м/с}^2$$

(3 балла)

4. Аналогичная сила действует и против движения автомобиля (другая проекция Тогда необходимая добавочная мощность:

$$N = Fv = F_\perp sin45^\circ v = 20.84\text{Вт}$$

(3 балла)

Следите!

- Вебсайт
- Инстаграм
- Телеграм

Контакты

При обнаружении ошибок, недочетов, вопросов, угроз и/или предложений обращайтесь через почту или телеграм:

- Личный телеграм
- Почта

Благодарности

Этот турнир не был бы осуществлен без материального и иного вклада наших партнеров и спонсоров.
Haileybury Astana - одна из самых престижных частных школ страны, которая предоставила нам прекрасную площадку, кейтеринг для участников, членов жюри, организаторов, волонтеров и сопровождающих.
FlyArystan - лучшая лоукост-авиакомпания в Центральной Азии, которая помогла с транспортировкой членов жюри APhB из Алматы, Актобе, Семея и Талдыкоргана.
Республиканская Физико-Математическая Школа города Астаны - легендарная и одна из лучших олимпиадных школ страны по версии *matol.kz*, которая помогла нам с призовым фондом и другими вопросами.
American Corner & Maker Space Astana - совместный проект Дипломатического представительства США и компании Chevron, которая осуществляет различные проекты в области культуры и образования (в особенности STEM). Американский уголок предоставил мерчандайз для призеров и победителей, а также информационную поддержку на своих ресурсах.
Beyond Curriculum - крупнейшая платформа для олимпиадников и интересующихся по разным дисциплинам, включающая различные подразделения:*Ask, Scoreboard* и пр. Beyond финансово помогли нам с оплатой мерчандайза для призеров и победителей старшей лиги, а Антон Моргунов с улучшением действующего регламента.
Maple Bear - представительство мировой сети Канадских детских садов и школ, которые предоставили мерчандайз для призеров и победителей младшей лиги.
Kinematic Academy - платформа для изучения олимпиадной физики и не только в Павлодаре и онлайн. Руководитель Kinematic Academy Алексей Шишкин помог нам финансово и академически.

Партнеры

И было бы странно горячо не поблагодарить и не отметить весь состав наших жюри и других подельников.

Коллегия составителей задач старшей лиги: Алишер Еркебаев, Досжан Бисимби, Маргулан Нурсагатов, Максим Чалый, Амир Пшенбаев, Илья Гриднев, Мирас Амирбеков и Алексей Шишкин

Коллегия составителей задач юниорской лиги: Ернур Кайроллаев, Алишер Еркебаев, Анна Митюкова и Никкита Горшунов

Коллегия жюри: Алишер Еркебаев, Досжан Бисимби, Ернур Кайроллаев, Маргулан Нурсагатов, Амир Пшенбаев, Адлет Акаш, Арсений Самойленко, Ердаулет Нахып, Мадина Имашева, Дамир Екибаев, Асхат Олжабай, Аянали Мухамедиев, Мирас Амирбеков, Артур Ким, Абылай Кабдулхадыр и Бекасыл Елубай

Отдельные благодарности:

Джон Коулз - Директор школы Haileybury Astana

Асылбек Мурзахметов - Digital-маркетолог и бизнес-консультант FIRST KAZAKHSTAN, руководитель Ustem Foundation

Наши донатеры и в особенности магазин PEEKABOO и клуб спортивной гимнастики PRO TRAINER, которые помогли собрать большую сумму на организационный фонд турнира

Назар Беркимбай - Главный организатор Алматинского турнира по матбоям

Дайана Неталиева - Дизайнер

Аружан Абденбаева - Координатор волонтеров

Алмат Өмірсадық - Фотограф

Маргулан Муптеке - Дизайнер и фотограф

Адиль Ашенов - Дизайнер, создатель логотипа APhB 2023