Almaty Physics Battles 2024

Отборочный тур

Юниорская лига

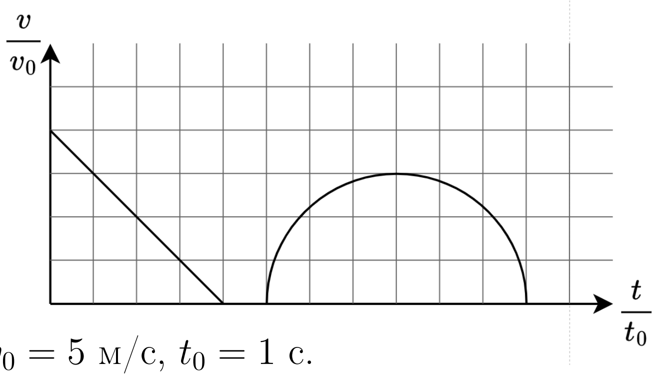
12-19 мая 2024

Содержание

Задачи Младшей лиги

Задача 1: Странная поездочка *(Кайроллаев Е.)*

Алмат заказал такси, но таксист оказался интересным человеком. В какой-то момент времени (для простоты вычислений скажем, что $t = 0$), он начал тормозить, некоторое время стоял, а потом начал двигаться с нелинейной зависимостью скорости от времени, как показано на графике ниже. Считайте, что $v_0 = 5$ м/с, $t_0 = 1$ с.



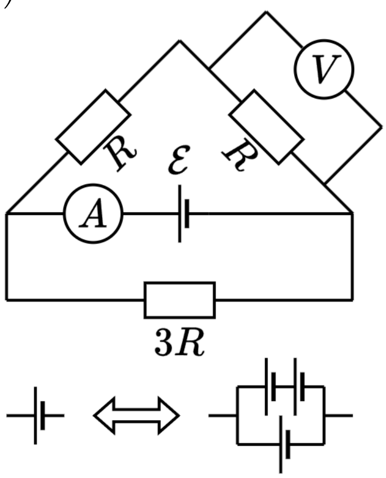
1. Какое расстояние Алмат проехал за промежуток времени, изображённый на графике? Ответ округлите до одной цифры после запятой.

2. Чему равна максимальная скорость за показанный промежуток времени?

3. В какой момент времени после остановки таксист ехал с таким же ускорением как и в первые $4t_0$? Ответ округлите до одной цифры после запятой.

Задача 2: Младший электрик Альтаир *(Еркебаев А.)*

В цепи, указанной на рисунке справа, значение единицы сопротивления $R = 100$ Ом, а величина ЭДС равна $\mathcal{E} = 12$ В. Измерительные приборы считайте идеальными, а внутреннее сопротивление источника напряжения гораздо меньше, чем R. Определите,



1. Чему равны значения силы тока на амперметре и напряжения на вольтметре? Ответ укажите в амперах [А] и вольтах [В] соответственно.

Младший электрик Альтаир нашёл ещё два источника напряжения, точно таких же, как и тот, что находится в цепи. Для того, чтобы повысить напряжение на вольтметре, он последовал умным советам старшего электрика Арсена, попробовал соединить эти два источника к третьему, и, полностью следуя предписанным инструкциям, получил соединение источников напряжения таким, как показано в нижней правой части рисунка.

2. Каким теперь станет новое напряжение на вольтметре, в вольтах?

Задача 3: Бостонское чаепитие *(Кайроллаев Е.)*

Аскар решил заварить чай, купленый в китайской чайной лавке. Продавщица сказала, что зелёный чай лучше всего заваривать при температуре от 80°C до 85°C. Первым делом, он, налив $V_\mathrm{w} = 1$ л, при комнатной температуре $t_\mathrm{r} = 25$°C в чайник, начал кипятить её. В данной задаче теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

1. Через сколько секунд закипит вода, если мощность чайника $P = 2500$ Вт? Удельная теплоёмкость воды $c_\mathrm{w} = 4200$ Дж/(кг · К), плотность воды $\rho_\mathrm{w} = 1000$ кг/м^3.

После этого, он перелил воду в заварник, который долгое время лежал в шкафу, и положил в него термометр, который показал $t_0 = 95$°C. Так как Аскар был нетерпеливым, он решил ускорить процесс и добавить холодной воды для охлаждения.

2. Чему равна теплоёмкость заварника, если теплообмен происходил только между водой и заварником? Укажите теплоёмкость в [Дж/К].
3. Какой объем воды при комнатной температуре нужно добавить Аскару, чтобы температура смеси была $t_\mathrm{m} = 85$°C? Укажите объем в [мл].

Задача 4: Метастабильность *(Еркебаев А.)*

Если очистить воду от примесей и аккуратно её охладить, то можно достичь её охлаждения ниже точки плавления льда! Возьмём сосуд с переохлаждённой водой, температура которой $T_0 = -2$°C. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 332$ кДж/кг, плотность воды и льда равны $\rho_\mathrm{w} = 1000$ кг/м^3 и $\rho_\mathrm{i} = 900$ кг/м^3 соответственно; атмосферное давление $P_a = 10^5$ Па.

1. Сосуд с водой резко встряхнули, и вода начала замерзать, превращаясь в равновесную смесь воды и льда. Какая доля воды (в процентах) превратилась в лёд? Округлите до десятой доли процента.

Теоретически достичь точки плавления ниже нуля можно, если подвергнуть жидкость очень высоким давлениям. При увеличении внешнего давления на ΔP смещение точки плавления ΔT описывается законом Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{\lambda}{(T^\circ\mathrm{C} + 273)\,(1/\rho_w - 1/\rho_i)}.$$

2. Укажите, давление P во сколько атмосфер (с точностью до десятых) нужно для того, чтобы добиться равновесного состояния воды при температуре T_0?

Задача 5: Утопленник *(Еркебаев А.)*

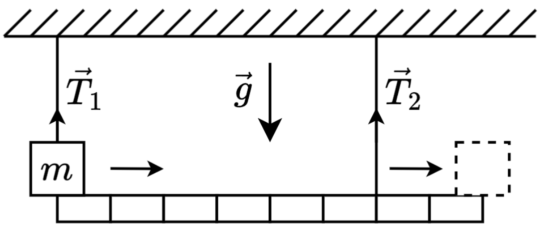
В содержащем воду цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 200$ см^2 положили кубик изо льда с ребром $a = 10$ см. Незадолго после этого, на кубик аккуратно положили грузик массы m. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, а льда – $\rho = 900$ кг/м^3; в сосуде достаточно много воды, чтобы кубик не касался дна в течении всей задачи, а также он достаточно высокий, чтобы вода не выливалась. Определите,

1. Насколько изменился уровень воды Δh_1 в сосуде после того, как туда положили ледяной кубик без груза? Ответ дайте в сантиметрах [см].

2. Какой должна быть минимальная масса груза $m_{\min}$ для того, чтобы кубик изо льда полностью погрузился под воду? Ответ дайте в граммах [г].

3. Насколько изменился уровень воды Δh_2 (относительно самого начального состояния системы) после того, как на кубик погрузили груз массы $m_{\min}$, определённый из предыдущего пункта? Ответ дайте в сантиметрах [см].

Задача 6: Перевесили *(Еркебаев А.)*



На рисунке, показанном справа, груз массы $m = 3$ кг находился на краю однородного рычага неизвестной массы M (для удобства на рычаге указаны деления в масштабе). Затем, груз переместили с одного края на другой край, а потом левую нить перерезали. Оказалось, что система всё равно находилась в равновесии. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

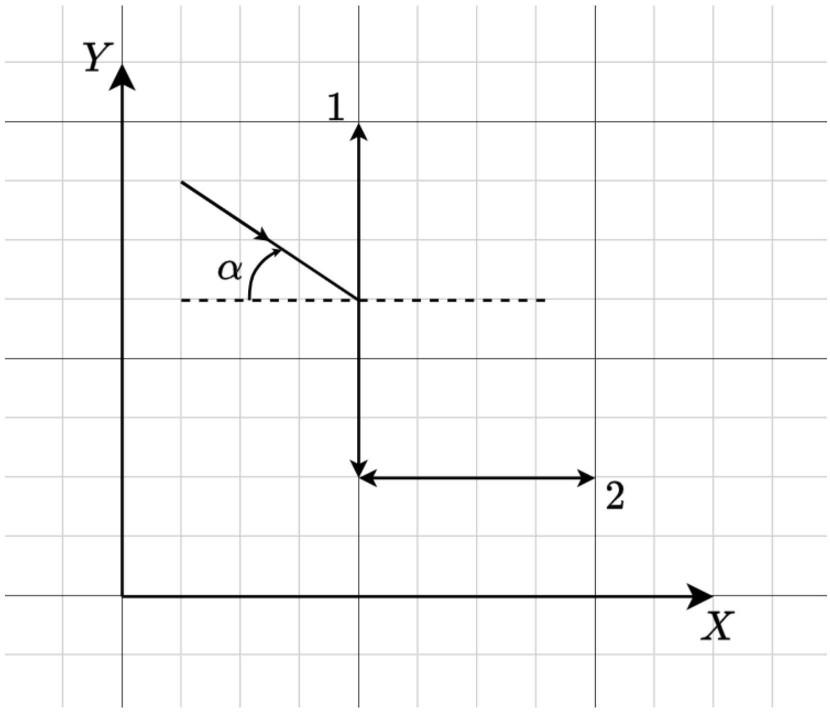
1. Укажите массу M рычага в килограммах в данной задаче.

2. Найдите значения сил натяжения T_1 и T_2 в ньютонах в самом начале.

3. На сколько ньютонов изменились силы натяжения ΔT_1 и ΔT_2 левой и правой нитей соответственно при перемещении груза? Добавьте знак минус в ответе, чтобы показать уменьшение данной величины.

Задача 7: Изобразительное искусство *(Кайроллаев Е.)*

В данной задаче, 1 клетка имеет сторону в 1 единицу длины. Даниал в своём оптическом эксперименте собрал систему из двух линз с одинаковыми фокусными расстояниями $F = 4$, как показано на чертеже (к счастью, Даниал, в отличие от лорда Кельвина, смог сохранить свои чертежи в целости и сохранности). Первым же делом, он проверил точность сборки, пустив тонкий луч света так, что он прошёл через обе линзы не преломившись.



1. На каком расстоянии от оптического центра (ОЦ) первой линзы должен проходить луч? Считайте расстояние отрицательным, если точка "ниже" ОЦ.

2. Под каким углом к главной оптической оси первой линзы должен проходить луч? Угол отсчитывается как показано стрелочкой на рисунке; если угол отсчитывается в обратную сторону, то считайте его отрицательным.

В точке $S(-2, 7)$ Даниал поставил точечный источник света.

3. Какая координата x изображения от линзы 1?

4. Какая координата y изображения от линзы 1?

5. Какая координата x изображения от линзы 2?

6. Какая координата y изображения от линзы 2?

Задача 8: С–Г–С *(Кайроллаев Е.)*

Наверняка, прочитав название, вы подумали, что мы сейчас будем работать с именитой Гауссовой системой сантиметр-грамм-секунда. Однако ж, её сокращение пишется как "СГС", и внимательные читатели уже обратили внимание на н-тире (более точно "n-dash") между буквами в аббревиатуре, которая на самом деле расшифровывается, как "сом–гиппопотам–скорпион". Ниже представлены основные единицы в данной системе:

- средняя длина сома [сдс] — $l_{\text{u}} = 1.4$ м;
- средняя масса гиппопотама [смг] — $m_{\text{u}} = 1480$ кг;
- длина первой песни в первом альбоме группы Scorpions [дпп] — $t_{\text{u}} = 292$ с.

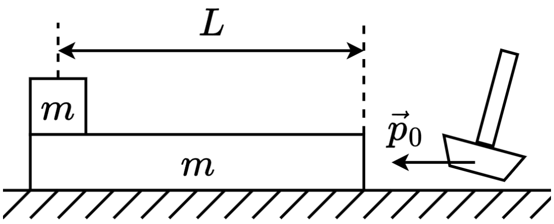
В данной задаче мы рассмотрим взаимосвязь между СИ и С–Г–С для некоторых физических величин. **Внимание:** записывайте числа в стандартном виде $a \cdot 10^k$, где $1 \leq a < 10$, k – целое число. Во всех пунктах, с использованием правил округления, указывайте число a с точностью до **трёх** цифр после запятой; если введённый ответ будет лишь *приближённо* верным, то может быть вычтено вплоть до 50% за данный пункт.

1. Выразите массу протона ($1.6726 \cdot 10^{-27}$ кг) через [смг];
2. Выразите ускорение свободного падения (9.81 м/с^2) в [сдс/дпп^2];
3. Выразите единицу силы Вейдер (сокр. вдр) в С–Г–С через Ньютоны. Другими словами, сколько Ньютонов в одном Вейдере?

Калория — единица измерения энергии, которая равна теплу, которое необходимо сообщить 1 грамму воды для нагрева на 1°С. Чашка Кофе (сокр. чк) — единица энергии в С–Г–С. Теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot ^\circ$ С).

4. Найдите, сколько калорий в одном [чк]?

Задача 9: По голове себе постучи *(Еркебаев А.)*



Маленький грузик массы $m = 1$ кг положили на край доски такой же массы $m = 1$ кг и длины $L = 15$ см. С другого края доску периодически подбивают молотком, сообщая импульс $p_0 = 0.8$ Н $\cdot$ с и ожидая, пока система не придёт в равновесие. Коэффициенты трения между доской и столом, а также между грузиком и доской одинаковы и равны $\mu = 0.4$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответьте,

1. Чему равны скорости доски v_1 и грузика v_2 в м/с сразу после одного удара?

2. Какова будет скорость доски v в м/с, когда проскальзывание между ней и грузиком прекратится в течение движения после одного удара?

3. Сколько ударов n потребуется, чтобы грузик соскользнул с доски?

Задача 10: Призрачные пробки *(Бисимби Д.)*

Очередная олимпиада по русскому языку – и однажды в городе Алматы, школьник Илияс снова опаздывал на неё. Чтобы добраться быстрее, он решил перебежать дорогу в неположенном месте. На него двигался ряд машин, с постоянной скоростью $V = 15$ м/с, расстояние между которыми было $d = 8$ м. Был дождливый день, коэффициент трения шин об асфальт $\mu = 0.2$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Первый водитель увидел Илияса и начал тормозить, однако понял, что Илияс выбрал оптимальный путь через дорогу и что опасности нет. Поэтому водитель тормозил всего лишь 1 секунду, а затем продолжил ехать дальше с постоянной скоростью. Второй водитель тоже начал снижать скорость как только отреагировал на торможение первого, пока не сравнялся с ним по скорости и не продолжил ехать дальше – как оказалось, с немного меньшей скоростью, чем первый водитель. Так же поступил и третий водитель, и четвёртый, и так далее. Таким образом, целый ряд машин притормозил – получилась призрачная пробка только потому, что первый водитель незначительно снизил скорость.

Из-за времени реакции людей, каждый водитель реагирует на торможение машины перед ним только через 0.5 секунд. Также водитель перестаёт тормозить только через 0.5 секунд после того, как его скорость сравнялась со скоростью передней машины. Считайте, что после торможения скорость машин не меняется.

1. Найти, какая машина в ряде в итоге действий Илияса полностью остановится. Счёт машин начинается с первой, которая начала тормозить; считайте, что никакие машины не столкнулись.

2. Найдите расстояние между машинами 5 и 6 сразу после того, как обе машины перестанут тормозить.

3. Какое минимальное расстояние $d_{\min}$ должно быть между машинами, чтобы ни одна из них не столкнулась с другой?

Решения задач Младшей лиги

Задача 1: Странная поездочка *(Кайроллаев Е.)*

1. Расстояние есть площадь под графиком $v(t)$. Найдём площадь одной клетки:

$$S = v_0 t_0 = 5 \text{ м}. \tag{1.1}$$

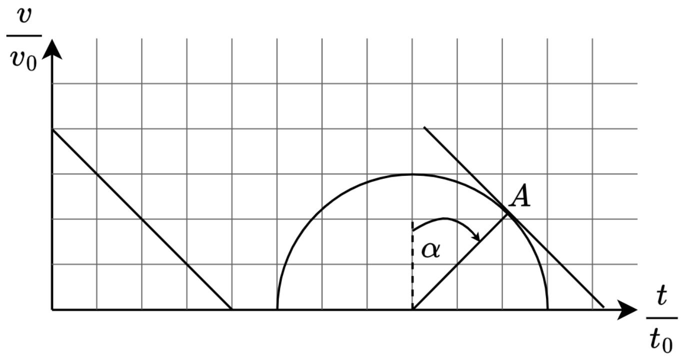
Чтобы найти площадь под графиком, нужно сложить площадь треугольника с площадью полукруга:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + 0.5 \cdot \pi \cdot 3^2 = 8 + 4.5\pi = 40 \text{ м} + 22.5\pi \text{ м} \approx 110.7 \text{ м}. \tag{1.2}$$

2. Для нахождения максимальной скорости, нужно найти точку с самой большой ординатой: $(0, 4)$. Отсюда находим:

$$v_{\max} = 4 \cdot 5 \text{ м/с} = 20 \text{ м/с}. \tag{1.3}$$

3. Проведём касательную к окружности с таким же наклоном, как и график скорости в $[t_0], [4t_0]$. Как видим, он касается окружности в точке A. Так как угловой коэффициент равен -1, то угол альфа $\alpha = 45°$. Зная, что радиус окружности равен единице, находим:



$$t_A = 8 + 3 \sin 45° \approx 10.1 \text{ с}. \tag{1.4}$$

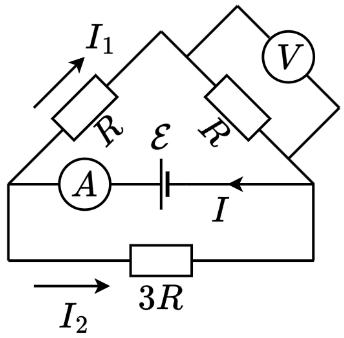
Если допущена ошибка со знаками и получено:

$$t_A = 8 - 3 \sin 45° \approx 5.9 \text{ с}, \tag{1.5}$$

то за пункт выдаётся только 2 балла.

Содержание	**Баллы**
$S = 110.7$ м	4
$v_{\max} = 20$ м/с	2
$t_A = 10.1$ с	4
Альтернативно, если $t_A = 5.9$ с	2

Задача 2: Младший электрик Альтаир *(Еркебаев А.)*

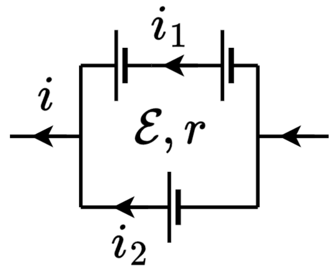


1. Рассмотрев данную цепь, можно записать, что $I_1 + I_2 = I$, а также два уравнения второго закона Кирхгофа, которые соответствуют верхному и нижнему обходам контура соответственно:

$$\mathcal{E} = 2I_1R, \quad \mathcal{E} = 3I_2R. \tag{2.1}$$

Отсюда определяем силу тока и напряжение на приборах:

$$I = \frac{5\mathcal{E}}{6R} = 0.1 \text{ А}, \quad V = I_1R = \frac{\mathcal{E}}{2} = 6 \text{ В}. \tag{2.2}$$



2. Теперь рассмотрим структуру самой системы источников. В таких масштабах уже нельзя пренебрегать внутренними сопротивлениями ЭДС. Задача этого пункта состоит в том, чтобы подобрать эквивалентные значения ЭДС $\mathcal{E}^*$ и (опционально) внутреннего сопротивления r^*, который бы имел эквивалентный источник. Иначе говоря, взять за основу формулу

$$U = \mathcal{E}^* - ir^*, \tag{2.3}$$

и привести суммарное действие троих ЭДС к такого вида зависимости. Итак, обход по контуру и падение напряжения на нём справа налево дают формулы

$$2\mathcal{E} - \mathcal{E} = 2i_1r - i_2r, \quad i_1 + i_2 = i, \quad U = \mathcal{E} - i_2r, \tag{2.4}$$

результатом решения которых будет

$$i_2 = \frac{2}{3}i - \frac{\mathcal{E}}{3r}, \quad \Rightarrow \quad U = \frac{4\mathcal{E}}{3} - \frac{2}{3}ir. \tag{2.5}$$

Получаем, что

$$\mathcal{E}^* = \frac{4}{3}\mathcal{E}, \quad r^* = \frac{2}{3}r. \tag{2.6}$$

Поскольку $r \ll R$, второе нас не интересует – но теперь мы знаем, что общий ЭДС увеличивается в 4/3 раза (хотя Альтаир мог бы увеличить его втрое!), а значит новое показание на вольтметре будет

$$V_{\text{new}} = \frac{4}{3} \cdot 6 \text{ В} = 8 \text{ В}. \tag{2.7}$$

Содержание	Баллы
$I = 0.1$ А	2
$V = 6$ В	2
$V_{\text{new}} = 8$ В	6

Задача 3: Бостонское чаепитие *(Кайроллаев Е.)*

1. За время τ чайник вырабатывает энергию $P\tau$, которая вся уходит на нагрев воды, так как теплообмена с окружающей средой нет. Тогда, записывая уравнение теплового баланса, получаем:

$$P\tau = c_{\text{w}}\rho V_{\text{w}}(t_{\text{b}} - t_{\text{r}}), \tag{3.1}$$

где t_{b} — это температура кипения воды. Решая это уравнение, находим время, затраченное на нагрев воды:

$$\tau = \frac{c_{\text{w}} V_{\text{w}} \rho (t_{\text{b}} - t_{\text{r}})}{P} = 126 \text{ с}. \tag{3.2}$$

2. Раз уж теплообмен происходил только между водой и заварником, то уравнение теплового баланса выглядит следующим образом:

$$c_{\text{w}}\rho V_{\text{w}}(t_{\text{b}} - t_0) = C(t_0 - t_{\text{r}}), \tag{3.3}$$

Где C — теплоёмкость заварника, температура которого равна комнатной потому что он долго лежал в шкафу. Решая уравнение для теплоёмкости, получаем:

$$C = \frac{c_{\text{w}}\rho \text{V}(t_{\text{b}} - t_0)}{t_0 - t_{\text{r}}} = 300 \ \frac{\text{Дж}}{{}^\circ\text{C}}. \tag{3.4}$$

3. Доливая холодную воду в заварник, Аскар охлаждает его и воду, которую находится в нём, тогда

$$c_{\text{w}}\rho V_{\text{w}}(t_0 - t_m) + C(t_0 - t_m) = c_{\text{w}}\rho V(t_{\text{m}} - t_{\text{r}}). \tag{3.5}$$

Отсюда находим объем воды:

$$V = \frac{c_{\text{w}}\rho V_{\text{w}}(t_0 - t_m) + C(t_0 - t_m)}{c_{\text{w}}\rho(t_{\text{m}} - t_{\text{r}})} \approx 179 \text{ мл}. \tag{3.6}$$

Содержание	Баллы
$\tau = 126$ с	3
$C = 300$ Дж/°C	3
$V \approx 179$ мл	4

Задача 4: Метастабильность *(Еркебаев А.)*

1. При резком встряхивании в воде образуются точки кристаллизации, на которых лёд начинает нарастать. При замерзании воды отданная теплота передаётся на нагрев остальной её части – поэтому можно записать уравнение

$$\lambda m_i = cm(0^\circ\mathrm{C} - T_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{m_i}{m} = \frac{c|T_0|}{\lambda} = 2.5\%. \tag{4.1}$$

2. Подстановкой величин в уравнение Клапейрона-Клаузиуса численно получаем ответ

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{3.32 \cdot 10^5}{271(1/1000 - 1/900)} = -1.1 \cdot 10^7\ \frac{\text{Па}}{^\circ\mathrm{C}}. \tag{4.2}$$

Видя, что $\Delta T \ll T_0$ по абсолютной шкале температур, получаем, что

$$P = P_a + \frac{\Delta P}{\Delta T} \cdot T_0 = 221.5\ \text{атм}. \tag{4.3}$$

Содержание	Баллы
$m_i/m = 2.5\%$	6
$P \in (218; 222)$ атм	4

Задача 5: Утопленник *(Еркебаев А.)*

1. Рассмотрим равновесие кубика:

$$\rho a^3 g = \rho_0 g V, \tag{5.1}$$

где V – объём погруженной в воду части кубика. Из-за данной погруженной части соответственно увеличится уровень воды:

$$V = S\Delta h_1. \tag{5.2}$$

Иным способом может быть рассмотрение того, что на дно сосуда появляется дополнительное давление

$$\Delta F = \rho_0 g \Delta h_1 \cdot S, \tag{5.3}$$

а этот прирост в давлении обусловлен наличием веса кубика, который сообщает это давление через воду, то есть

$$\Delta F = \rho a^3 g. \tag{5.4}$$

Итак, окончательным ответом будет

$$\Delta h_1 = \frac{\rho a^3}{\rho_0 S} = 4.5 \text{ см.} \tag{5.5}$$

2. При полном погружении кубика появляется дополнительная архимедова сила

$$\Delta F_A = \rho_0 g (a^3 - V), \tag{5.6}$$

которая и удержит дополнительный груз, т.е. $\Delta F_A = mg$. Итак,

$$m = (\rho_0 - \rho) a^3 = 100 \text{ г.} \tag{5.7}$$

3. Полное изменение уровня воды Δh_2 соответствует полному погружению кубика объёмом a^3:

$$\Delta h_2 = a^3/S = 5 \text{ см.} \tag{5.8}$$

Содержание	Баллы
$\Delta h_1 = 4.5$ см	4
$m = 100$ г	4
$\Delta h_2 = 5$ см	2

Задача 6: Перевесили *(Еркебаев А.)*

1. Рассмотрим момент после перерезания левой нити. И груз, и центр тяжести рычага равноудалены (на две единицы) от правой нити, относительно которой рычаг может вращаться – значит очевидно, что

$$M = m = 3 \text{ кг.} \tag{6.1}$$

2. Запишем равновесие системы. Суммарную тяжесть рычага с грузом уравновешивают нити:

$$T_1 + T_2 = (M + m)g = 2mg. \tag{6.2}$$

Теперь рассмотрим равенство моментов – в качестве опорной точки удобно взять левую нить. В таком случае

$$Mg \cdot 4 = T_2 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 20 \text{ Н.} \tag{6.3}$$

Вычитая этот результат от первого уравнения, получаем

$$T_1 = 2mg - T_2 = 40\ \text{Н}. \qquad (6.4)$$

3. Теперь новые силы натяжения равны $T_1 + \Delta T_1$ и $T_2 + \Delta T_2$. Из равенства сил, действующих на рычаг, понимаем, что суммарного изменения силы натяжения нет, так что

$$\Delta T_1 + \Delta T_2 = 0. \qquad (6.5)$$

Рассмотрим вращение относительно левого конца рычага. Получаем

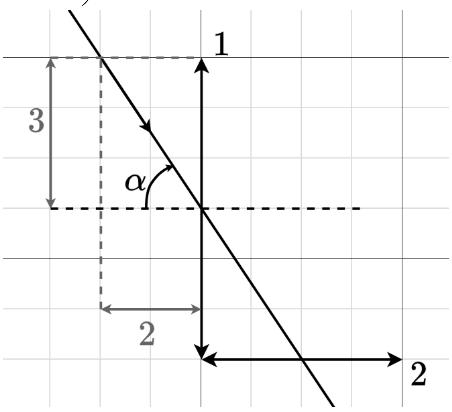
$$Mg \cdot 4 + mg \cdot 8 = (T_2 + \Delta T_2) \cdot 6. \qquad (6.6)$$

Решая полученное уравнение, выводим

$$\Delta T_2 = \left(\frac{2}{3}M + \frac{4}{3}m\right) g - T_2 = 40\ \text{Н}, \quad \Delta T_1 = -40\ \text{Н}. \qquad (6.7)$$

Содержание	Баллы
$M = 3$ кг	2
$T_1 = 40$ Н	2
$T_2 = 20$ Н	2
$\Delta T_1 = -40$ Н	2
$\Delta T_2 = 40$ Н	2

Задача 7: Изобразительное искусство *(Кайроллаев Е.)*



При прохождении через линзу, лучи света не преломляются только при прохождении через оптический центр. Соответственно, луч должен проходить на расстоянии $l_1 = 0$.

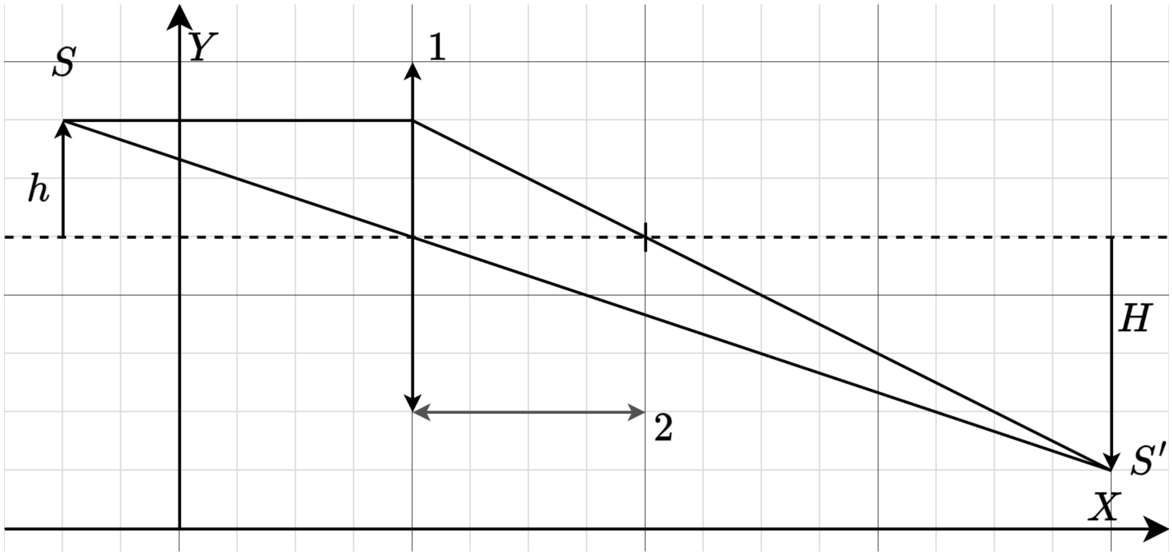
Так как луч проходит через обе линзы не преломившись, то он пересекает и вторую линзу в оптическом центре. Проводя построение, как на рисунке ниже, находим угол

$$\alpha = \arctan\frac{3}{2} = 56.3°. \qquad (7.1)$$

Изображение от линзы можно найти двумя способами. Первый — построением, второй — решая уравнение линзы. В дальнейшем считайте, что координаты оптических центров первой и второй линз $(x_1, y_1) = (4, 5)$ и $(x_2, y_2) = (6, 2)$, соответственно. Сначала, перед построением, будем использовать два факта:

- Луч, проходящий через ОЦ, не преломляется;
- Луч, проходящий параллельно ГОО, после преломления проходит через фокус линзы.

Строя изображение, следуя правилам, получаем чертёж (где S' — точка, в которой находится первое изображение, h — высота предмета над ГОО, H — высота изображения над ГОО:



Отсюда несложно найти координаты изображения $S'(16, 1)$.
Альтернативно, можно решать через формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \tag{7.2}$$

где $d = x_1 - x_S$ — расстояние от ОЦ до объекта, $f = x_i - x_1$ — расстояние от ОЦ до изображения. Подставляя эти значение в формулу, получаем уравнение линзы в координатном виде:

$$\frac{1}{x_1 - x_S} + \frac{1}{x_i - x_1} = \frac{1}{F}. \tag{7.3}$$

Решая это уравнение, находим координату x_i изображения:

$$x_i = x_1 + \frac{(x_1 - x_S)F}{x_1 - x_S - F} = 16. \tag{7.4}$$

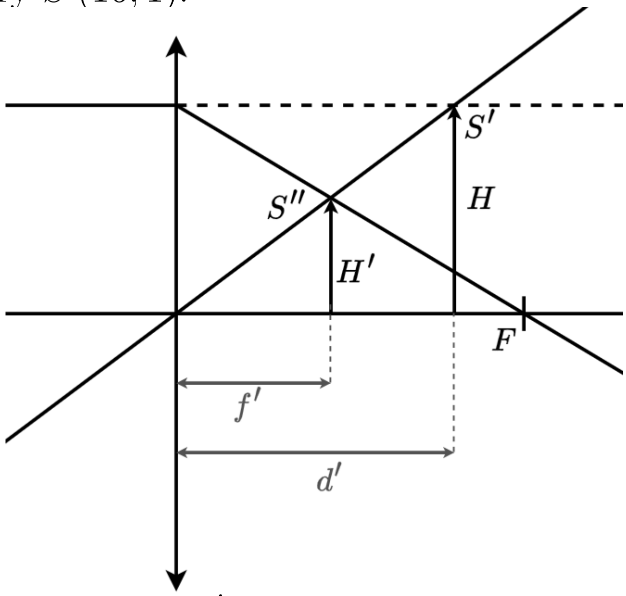
Аналогичным образом, адаптируем формулу увеличения линзы:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{y_1 - y_i}{y_S - y_1} \tag{7.5}$$

Используя подобие треугольников, находим координату y_i изображения:

$$y_i = y_1 - (y_S - y_1)\frac{f}{d} = y_1 - (y_S - y_1)\frac{x_i - x_1}{x_1 - x_S} = 1. \tag{7.6}$$

Как мы видим, оба способа приводят к ответу $S'(16, 1)$.



Как видно из рисунка в условии, лучи не могут пройти через вторую линзу, не пройдя через первую. Значит, объектом для второй линзы будет служить только изображение первой линзы. Для большей наглядности, начертим ход лучей через вторую линзу, без соблюдения масштаба, но с соблюдением ключевых деталей. Согласно конвенции, реальные лучи нарисованы сплошной линией, а продолжения лучей — пунктирной.

Перед фокусировкой на S', лучи проходят через вторую линзу (расстояние от плоскости линзы до S' меньше фокусного расстояния линзы). При этом, они преломляются и фокусируются на $S''(x_I, y_I)$. Запишем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{F}, \tag{7.7}$$

где $d' = y_i - y_2 = -1$ — расстояние от второй линзы до изображения от первой линзы. Подставляя значения в формулу, находим:

$$f' = \frac{-1 \cdot 4}{-1 - 4} = 0.8. \tag{7.8}$$

Заметьте, мы не находили общую формулу, как для пунктов **3** и **4**, потому что данная ситуация менее знакомая (при том, ещё и в непривычной вертикальной оси), поэтому, дабы избежать лишних ошибок со знаками, было решено сразу подставить числа в формулу. Так как $f' > 0$, то изображение формируется за линзой (то есть под ней). Тогда, находим:

$$y_I = y_2 - f = 1.2. \tag{7.9}$$

Аналогично первой задаче, записываем увеличение (учитываем что изображение и объект находятся по одну сторону ГОО):

$$\Gamma = \frac{H'}{H} = \frac{x_I - x_2}{x_i - x_2} = \frac{|f'|}{|d'|} = 0.8, \tag{7.10}$$

и находим горизонтальную координату изображения второй линзы:

$$x_I = x_2 + (x_i - x_2) \cdot \Gamma = 6 + (16 - 6) \cdot 0.8 = 14. \tag{7.11}$$

Содержание	Баллы
$l_1 = 0$	1
$\alpha = 56.3^\circ$	1
$x_i = 16$	2
$y_i = 1$	2
$x_I = 14$	2
$y_I = 1.2$	2

Задача 8: С–Г–С *(Кайроллаев Е.)*

Для начала выразим единицы измерения в СИ через единицы измерения в С–Г–С:

- $[\text{м}] = \frac{5}{7}\ [\text{сдс}] \approx 0.714\ [\text{сдс}]$;
- $[\text{кг}] = \frac{1}{1480}\ [\text{смг}] \approx 6.757 \cdot 10^{-4}\ [\text{смг}]$;
- $[\text{с}] = \frac{1}{292}\ [\text{дпп}] \approx 3.4 \cdot 10^{-3}\ [\text{дпп}]$

Используя эти данные, можно приступать к решению пунктов.
1. Найдём массу протона:

$$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} = 1.6726 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{1}{1480}\ \text{смг} = 1.130 \cdot 10^{-30}\ \text{смг}. \tag{8.1}$$

2. Аналогично первому пункту, ускорение свободного падения:

$$\begin{aligned} g = 9.81\ \text{м}/\text{с}^2 = 9.81 \cdot \frac{5}{7}\ \text{сдс} \cdot 292^2\ \text{с}^{-2} = \\ = 597457.0286\ \text{сдс}/\text{дпп}^2 = 5.975 \cdot 10^5\ \text{сдс}/\text{дпп}^2. \end{aligned} \tag{8.2}$$

3. Для нахождения количества Ньютон в одном Вейдере, используем сопоставления из условия:

$$1\ \text{вдр} = 1\ \text{сдм} \cdot \text{сдс}/\text{дпп}^2 = 1480\ \text{кг} \cdot 1.4\ \text{м}\ / \left(292^2\ \text{с}^2\right) = 2.430 \cdot 10^{-2}\ \text{Н}. \tag{8.3}$$

4. Для начала найдём количество Джоуль в калории:

$$1\ \text{кал} = 4200\ \text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ \text{C}) \cdot 0.001\ \text{кг} \cdot 1^\circ\text{C} = 4.2\ \text{Дж}. \tag{8.4}$$

Далее, выразим Чашки Кофе через Джоули:

$$1\ \text{чк} = 1\ \text{сдс} \cdot 1\ \text{вдр} = 1.4\ \text{м} \cdot 2.430 \cdot 10^{-2}\ \text{Н} = 3.402 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}. \tag{8.5}$$

Подставляя значение Калорий, получаем:

$$1\ \text{чк} = 4.762994933\ \text{Дж} = 8.100 \cdot 10^{-3}\ \text{кал}. \tag{8.6}$$

Задача сопоставить единицы измерений имеет большую научно-техническую важность, поэтому приблизительные расчёты тут недопустимы. Поэтому была введена система бонусных коэффициентов (работает только в этой задаче) за вычисления с погрешностями:

- $k = 1$, если ответ совпадает с точностью до 4 значащих цифр;
- $k = 0.8$, если ответ совпадает с точностью до 3 значащих цифр;
- $k = 0.5$, если ответ совпадает с точностью до 2 значащих цифр.

Для того, чтобы высчитать свои баллы, нужно умножить бонусный коэффициент на баллы за пункт.

Содержание	**Баллы**
$m_p = 1.130 \cdot 10^{-30}$ смг	2
$g = 5.975 \cdot 10^5$ сдс/дпп^2 или $g = 5.974 \cdot 10^5$ сдс/дпп^2	2
1 вдр $= 2.430 \cdot 10^{-2}$ Н	2
1 чк $= 8.100 \cdot 10^{-3}$ кал $= 8.10 \cdot 10^{-3}$ кал $= 8.1 \cdot 10^{-3}$ кал	4

Задача 9: По голове себе постучи *(Еркебаев А.)*

1. Сразу после удара, доска приобретёт импульс p_0 от молотка, и, соответственно с этим, скорость

$$v_1 = p_0/m = 0.8\ \text{м/с}. \tag{9.1}$$

Грузик же за такое незначительное время удара не успеет сдвинуться, так что $v_2 = 0$.

2. Когда проскальзывание между доской и грузиком прекращается, $v_1 = v_2 = v$. Скорости доски и грузика меняются из-за наличия сил трения, причём доска испытывает трение

$$f_1 = \mu(N_1 + N_2) = \mu(mg + 2mg) = 3\mu mg, \tag{9.2}$$

где $N_1 = mg$ и $N_2 = 2mg$ – силы нормальной реакции между доской и грузом, и доской и столом соответственно. Трение, действующее на груз, ускоряет его с силой

$$f_2 = \mu N_1 = \mu mg. \tag{9.3}$$

Теперь же, имея систему уравнений

$$\begin{cases} v = v_1 - \dfrac{f_1}{m} \cdot \tau; \\ v = \dfrac{f_2}{m} \cdot \tau, \end{cases} \tag{9.4}$$

получаем время скольжения

$$\tau = \frac{mv_1}{f_1 + f_2} = \frac{v_1}{4\mu g}, \tag{9.5}$$

и, подставляя его в одно из двух уравнений выше, находим

$$v = v_1 \cdot \frac{f_2}{f_1 + f_2} = \frac{1}{4} v_1 = 0.2 \text{ м/с}. \tag{9.6}$$

3. Сперва определим, на какое расстояние смещается грузик относительно доски после одного удара. Сам груз движется (согласно рисунку из условия) влево, преодолевая расстояние

$$s_2 = \frac{f_2 \cdot \tau^2}{2m} = \frac{v_1^2}{32\mu g}. \tag{9.7}$$

Доска же проходит расстояние

$$s_1 = v_1 \tau - \frac{f_1 \cdot \tau^2}{2m} = \frac{5v_1^2}{32\mu g} \tag{9.8}$$

Дальнейшее торможение системы нас не интересует, поскольку относительное движение заканчивается. Получаем, что смещение за один удар равно

$$s = s_1 - s_2 = \frac{v_1^2}{8\mu g} = 2 \text{ см}, \tag{9.9}$$

и, учитывая, что $L = 15$ см, получаем, что за

$$n = 8 \tag{9.10}$$

ударов грузик соскользнёт с доски.

Содержание	**Баллы**
$v_1 = 0.8$ м/с	1
$v_2 = 0$ м/с	1
$v = 0.2$ м/с	4
$n = 8$	4

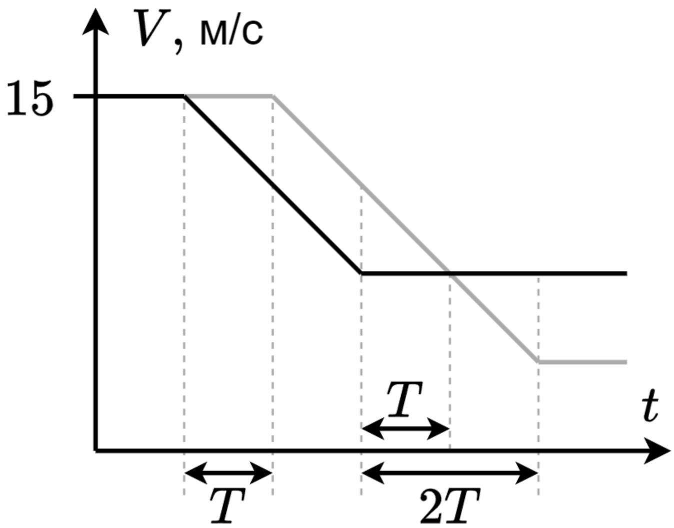
Задача 10: Призрачные пробки *(Бисимби Д.)*

1. Машины тормозят за счёт силы трения, поэтому их ускорение:

$$a = \frac{F}{m}, \quad F = \mu N = \mu m g \quad \Rightarrow \quad a = \mu g = 2 \text{ м/с}. \tag{10.1}$$

Каждый водитель тормозит на 0.5 секунд дольше, чем водитель перед ним. Поэтому скорость после торможения уменьшается на 1 м/с для каждой последующей машины в ряду. У первой машины после торможения будет скорость 13 м/с, у второй 12 м/с, у третьей 11 м/с и так далее. У машины номер $N = 14$ и у всех после неё конечная скорость будет 0.

2. Чтобы лучше понять как меняются скорости машин во времени, хорошо будет построить график скорости от времени для двух смежных машин. Для первой и второй машин:



Все отрезки времени T на графике одинаковые и равны 0,5 секунд по условиям задачи. Мы рассматриваем часть графика, где скорости машин меняются. Из графика видно, что первая машина будет тормозить от начальной скорости до своей конечной, и двигаться с конечной скоростью 1 секунду. А вторая машина сначала едет с начальной скоростью 0,5 секунд, и дальше тормозит до конечной скорости. Мы будем отмечать конечные скорости машин символом V_n, где n – это номер машины. Тогда расстояния, пройденные машинами:

$$d_n = \frac{V^2 - V_n^2}{2a} + V_n \cdot 2T, \quad d_{n+1} = V \cdot T + \frac{V^2 - V_{n+1}^2}{2a}. \tag{10.2}$$

Изменение расстояния между машинами, учитывая, что $V_n = V_{n+1} + 1$:

$$\Delta d = d_n - d_{n+1}, \quad \Delta d = -V \cdot T - \frac{V_n^2 - V_{n+1}^2}{2 \cdot a} + V_n \cdot 2T, \tag{10.3}$$

$$\Delta d = \frac{2V_n - 29}{4}. \tag{10.4}$$

Это формула для изменения расстояния между машинами n и $n+1$
Отсюда ответ на Пункт 2:

$$d_5 = 8 + \frac{2 \cdot 9 - 29}{4} = 5.25 \text{ м}. \tag{10.5}$$

3. Чтобы ответить на вопрос, указанный в третьем пункте, надо найти максимальное уменьшение расстояния между машинами.
На графике из второго пункта, на этот раз мы рассматриваем отрезок времени, где расстояние между машинами уменьшается, то есть от начального момента до момента, когда скорости машин сравняются.
Учитывая это:

$$d_n = \frac{V^2 - V_n^2}{2a} + V_n \cdot T, \quad d_{n+1} = V \cdot T + \frac{V^2 - V_n^2}{2a}. \tag{10.6}$$

А изменение расстояния:

$$\Delta d = d_n - d_{n+1}, \quad \Delta d = (V_n - V)T. \tag{10.7}$$

Подставляя значения:

$$\Delta d = \frac{V_n - 15}{2}. \tag{10.8}$$

Из уравнения (10.8) понятно что максимальное изменение расстояния будет при минимальном $V_n = 0$:

$$\Delta d = \frac{0 - 15}{2} = 7.5 \text{ м}. \tag{10.9}$$

Тогда минимальное расстояние между машинами должно быть 7.5 метров

Содержание	**Баллы**
$N = 14$	3
$d_5 = 5.25$ м	4
$\Delta d = 7.5$ м	3