Almaty Physics Battles

Отборочный этап

24/10/2025

Авторы задач: Пшенбаев А., Черемнов Р., Литвинов В., Елубай Б., Азатбеков А.
Вёрстка: Пшенбаев А., Черемнов Р., Елубай Б., Азатбеков А.
Иллюстрации: Пшенбаев А., Черемнов Р.

Содержание

Задачи Старшей лиги

Задача 1: Алмазный термометр *(Бекасыл Елубай)*

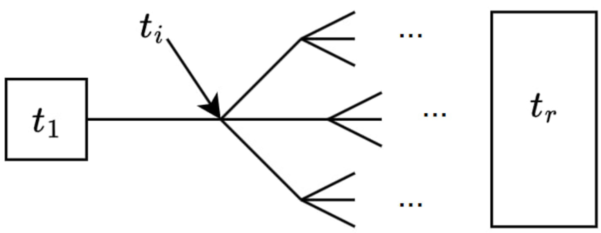
Внимание: Укажите температуры в градусах Цельсия, массу в граммах с одним знаком после запятой.

Как-то раз, Дамир в лаборатории нашел цилиндрические стержни из меди, плотность которой равна $\rho = 8.96$ г/см^3. Также в лаборатории имелись разные резервуары, которые могут поддерживаться при постоянной температуре. Дамир решил поиграться и провел ряд экспериментов.

Сперва, Дамир взял стержень длины l, левый и правый конец которого поддерживались при температурах $t_1 = 100^\circ$ C и $t_0 = 0^\circ$ C, соответственно. На расстоянии $\frac{2}{3}l$ от левого конца стержня находится точка контакта, к которой Дамир к основному стержню присоединил такой же, только вдвое короче. Второй конец короткого стержня поддерживается при температуре $t_2 = 10^\circ$ C.

1. После того как система достигла стационарного состояния, Дамир измерил температуру в точке контакта. Какую температуру t' измерил Дамир?

После этого, Дамир соорудил систему, показанную на рисунке справа. Слева находится резервуар при температуре $t_1 = 100^\circ$ C, а справа при неизвестной температуре t_r. Резервуары соединены цепочкой медных стержней, которые указаны линией на рисунке. Каждый стержень соединен справа с тремя одинаковыми стержнями, которые имеют в два раза меньше площадь поперечного сечения и длину чем предыдущий. Разветвление цепочки происходит очень большое количество раз, так что в задаче можете считать, что он разветвляется бесконечно много. Дамир измерил температуру t_i на правом конце первого стержня и он оказался равным 60° C.



2. Помогите Дамиру найти температуру t_r.

3. Найдите массу всей цепочки. Геометрические параметры первого стержня: $S_0 = 1$ см^2; $l_0 = 20$ см.

Задача 2: Муха Медали *(Роман Черемнов)*

Муха Медали, массой $m = 0.2$ г, случайно угодила в паутину паука Таира. К счастью для Медали, паутина ещё не была закончена и хозяина рядом не было. Считайте, что Таир успел сплести только $N = 100 \gg 1$ радиальных ниточек жёсткостью $k = 2$ Н/м распределенных равномерно по окружности. Также, известно что паутина сплетена внутри жёсткой трубы радиуса $R = 5$ см. Медали попал ровно в центр этой окружности, где пересекаются все ниточки.

1. Сначала Муха Медали пытался вырваться делая рывки в плоскости паутины. Найдите T_1 период свободных, малых колебаний в плоскости паутины.

2. Позже, он осознал, что его попытки тщетны и решил делать рывки перпендикулярно плоскости паутины. Найдите T_2 период свободных, малых колебаний перпендикулярных плоскости паутины.

3. Считайте, что паутина рвётся при растяжении превышающем четверть её длины покоя. Найдите при какой минимальной скорости мухи v (развиваемой моментально), он сможет вырваться из плена паука Таира?

Задача 3: Сон Илона Маска *(Бекасыл Елубай)*

На расстоянии a_0 от центра планеты запускают два спутника одинаковый массы в перпендикулярном направлении радиуса вектору от центра планеты и также относительно друг друга. Первый спутник движется по кругу, а второй по эллипсу, большая полуось которого в $\eta = (3/2)^{2/3}$ раз больше чем радиуса первого. Через определенное время $\tau = \gamma T_0$, где T_0 период первого спутника, спутники абсолютно неупруго сталкиваются в изначальной точке.

1. Найдите численное значение γ.

2. Найдите во сколько раз скорость спутников после столкновения больше изначальной скорости первого спутника, то есть укажите величину κ, которая определяется следующим образом: $v' = \kappa v_0$.

3. На какое максимальное расстояние удалится спутник после столкновения от центра планеты? Ввиде ответа укажите величину α, которая показывает насколько раз данное расстояние l больше $a_0 (l = \alpha a_0)$. Если ответ бесеконечность, то укажите ввиде ответа знак минус, «-».

Задача 4: One Phys *(Роман Черемнов)*

Адмирал Фудзитора из One Piece съел дьявольский фрукт, что позволяет ему повеливать гравитацией. Ему подвластно усиление, ослабление и изменение направления гравитационных полей. Как не посмотри способность - имба, но насколько тяжело её использовать? В этой задаче, мы рассмотрим энергетические затраты пользователя Дзуси Дзуси но Ми(название дьявольского фрукта - способности Фудзиторы). Для этого рассмотрим способность метеорит.

1. Фудзитора способен призывать с неба огромные каменные глыбы, радиуса $r = 5$ м и плотности $\rho = 2500$ кг/м^3 но сначала, он должен их туда запустить. Предполагая, что он обращает гравитационное поле в цилиндре, проходящем от земли до высоты $h = 1000$ м, $h \ll R$, где R это радиус Земли, определите энергию затрачиваемую Фудзиторой для поднятия сферического камня такого же радиуса, что и цилиндр. Пренебрегайте энергией на подъём воздуха и прочие связанные с воздухом затраты.

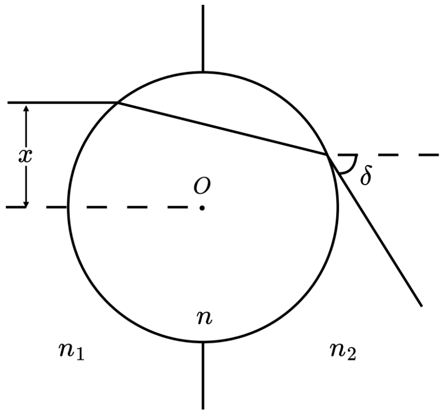
2. После достижения камнем высоты h, Фудзитора отменяет свою способность и камень движется самостоятельно. Как только скорость камня стала равно нулю, Фудзитора усиляет гравитационное поле до $10g$ в том же цилиндре содержащем камень и доходящем до земли. Определите энергетические затраты Фудзиторы.

3. В условиях прошлого пункта, определите кинетическую энергию камня по достижению им земли.

Считайте, что $g = 10$ м/с^2
После решения задачи самостоятельно сделайте вывод о её абсурдности)
Подсказка: мы не по ошибке добавили её в старшую лигу.
Где пасутся коровы? На поле.

Задача 5: Геомка *(Амир Пшенбаев)*

Имеется система из двух внешних сред с показателями преломления n_1 и n_2. Посередине между ними расположен стеклянный шар с показателем преломления n. Параксиальный пучок света направляется в сторону шара с прицельным параметром x, перпендикулярно границе, разделяющей две внешние среды (см. рисунок). Радиус шара $R = 1$ м, а показатели преломления равны $n = 1.50$, $n_1 = 1.33$ и $n_2 = 1.00$. Таким образом, выполняется условие $n > n_1 > n_2$.

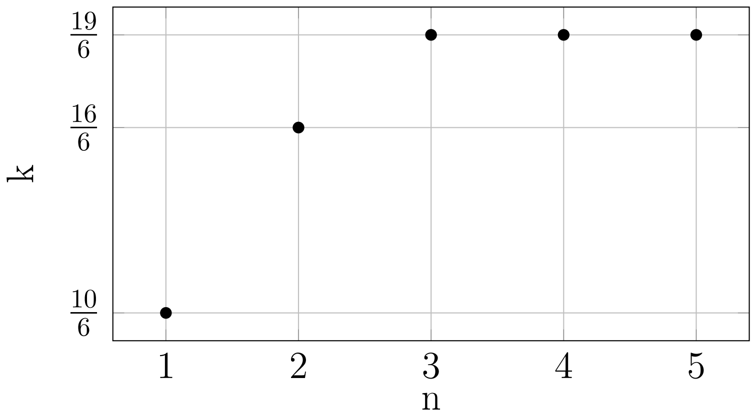


1. Найдите критическое расстояние x_c, при котором для лучей с $x > x_c$ происходит полное внутреннее отражение на границе раздела сред n и n_2.

2. Исходя из предыдущего пункта, найдите максимальный угол отклонения δ от начального направления, под которым свет выходит во вторую среду n_2.

Задача 6: ~~Многоклеточный~~ Многоатомный *(Владимир Литвинов)*

С пятью разными газами с количеством атомов в молекуле n от 1 до 5 совершали один и тот же процесс, получив отношения молярной теплоёмкости к универсальной газовой постоянной $k = \frac{C}{R}$ для каждого из газов в этом процессе. Опишите процесс дифференциальным уравнением P, dP, V, dV, получив все входящие в него коэффициенты. В качестве ответа введите дифференциальное уравнение, используя всплывающее окошко.



Задача 7: Подобие ~~треугольников~~ *(Роман Черемнов)*

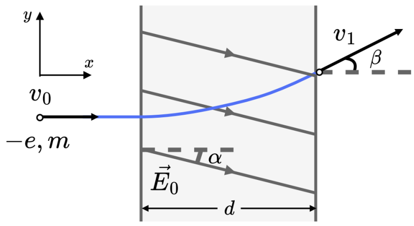
У Алёны была крутая камера и она все фотографировала. Однажды она обнаружила, что камера не только фотографирует, но и снимает! Это очень удивило Алёну и она решила опробовать новооткрытую функцию на больших и маленьких объектах. Считайте, что во всех видео изначально объект находится на самом верху экрана, а пол в самом низу.

1. Сначала она сбросила мяч с крыши дома высотой 5 м и сняла это на камеру. После, она сбросила бусинку с высоты 30 см. После того, как она сняла и это, она загрузила всё на компьютер и начала замедлять и ускорять сьёмку. Во сколько раз Алёна замедлила видео с бусинкой, если оно выглядело абсолютно идентично видео с мячиком.

2. Теперь, Алёна бросает мячик вверх со скоростью $v_1 = 3$ м/с и снимает и это. С какой скоростью ей надо бросить бусинку, чтобы на замедленной съёмке движение бусинки было идентично движению мячика?

3. Найдите начальную скорость и ускорение мячика на видео из прошлого пункта. Если высота экрана компьютера 20см

Задача 8: Движение электрона в поле *(Амир Пшенбаев)*

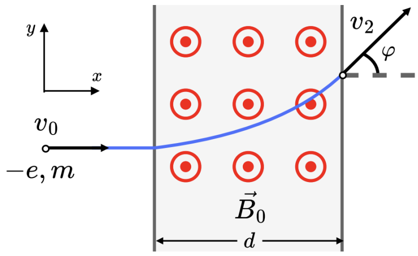


Электрон с зарядом $-e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ К и массой $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг влетает с начальной скоростью $v_0 = 150$ км/с в область однородного электрического поля $E_0 = 0.1$ кВ/м шириной $d = 0.5$ мм. Границы области перпендикулярны вектору начальной скорости v_0 (см. рисунок). Вектор напряженности поля E_0 направлен под углом $\alpha = 30°$ к начальной скорости.

Примечание: Все численные ответы для углов давайте в градусах. Считайте также данные E_0, v_0 и B_0 во всех пунктах одинаковыми.

1. Под каким углом β относительно начальной скорости v_0 выйдет электрон из поля?

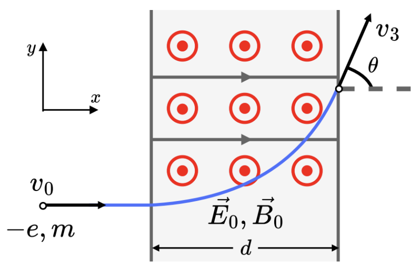
2. Чему равна скорость электрона v_1 при выходе из поля?



Пусть теперь в той же области шириной $d = 0.5$ мм вместо электрического поля находится однородное магнитное поле с индукцией $B_0 = 0.8$ мТл, направленной перпендикулярно плоскости рисунка (к нам) (см. рисунок).

3. Под каким углом φ относительно начальной скорости v_0 выйдет электрон из поля?

4. Чему равна скорость электрона v_2 при выходе из поля?



Рассмотрим третий случай: в области шириной

$$d = \frac{\sqrt{3} m v_0}{2eB_0} - \frac{mE_0}{2eB_0^2}$$

одновременно действуют два однородных поля. Электрическое поле E_0 направлено параллельно начальной скорости электрона v_0, а магнитное поле с индукцией B_0 направлено перпендикулярно плоскости рисунка (к нам) (см. рисунок).

5. Под каким углом θ относительно начальной скорости v_0 выйдет электрон из поля?

6. Чему равна скорость электрона v_3 при выходе из поля?

Задача 9: КвЕКИКВБОнд *(Роман Черемнов)*

Дисклеймер: все совпадения с реальными людьми в этой задаче случайны. Ернур любит размерности. Он решил, что скучно всегда решать в СИ, поэтому на каждой олимпиаде он изобретает новую (пожалуйста не делайте так) Однажды на респе, он снова взялся за это. Отчётливо слыша, как из соседней комнаты раздаётся кваканье лягушек которых препарировали биологи он решил взять на единицу времени 1 Квак = 1 Кв ≈ 0.3 с, который равен средней продолжительности квака лягушки. После он вспомнил, что недавно вырос и решил взять за единицу длины 1 Ернур Кайроллаев = 1 ЕК ≈ 1.81м. А за единицу массы он решил взять массу набора своих игральных карт 1 Набор игральных карт = 1 ИК ≈ 114 г

1. Найдите среднюю скорость Юпитера в этих единицах. $v_{\text{Юпитер}} = 13.07$ км/с.

2. Давайте условимся измерять силу в Вовах. Найдите сколько Ньютонов в одном Вове. Вова определяется аналогично Ньютону, через фундаментальные единицы системы КвЕКИКВБОнд

3. Будем измерять количество вещества не в молях, а в бабочках, потому что они красивее. Считая, что при стандартных условиях ($p = 10^5\text{Па}, t = 0°\text{C}$) 1 ЕК^3 водорода, содержится 3 бабочки найдите, сколько моль в одной бабочке.

4. Так уж сложилось, что в КвЕКИКБОнд магнитная и электрическая постоянные равны (нужно было ответ подгнать на апелле). Если сила тока измеряется в 1Ондаатже = 1Онд (Канадский писатель), то найдите, сколько амперов в одном Ондаатже?

Задача 10: F-1 *(Бекасыл Елубай)*

Формула-1 - вид автомобильных гонок, где болиды двигаются на средней скорости выше 200 км/ч. Рассмотрим некоторые ситуации из данной гонки.
Болид в начале прямого участка движется со скоростью $v_l = 270$ км/ч, которая также является максимально возможной скоростью на данном участке. Длина участка 300м, после чего начинается поворот, который представляет собой дугу окружности с радиусом $r = 70$ м. Максимальная скорость на повороте для болида состовляет $v_t = 180$ км/ч. Также, на прямом участке максимальное ускорение при торможении $a = 3g$. Во всех частях задачи считайте g равным 9,8 м/с^2.

1. За какое минимальное время(в секундах) гонщик может пройти прямой участок? Округлите ответ до 3 значащих числе после запятой.

Главным отличием болидов формулы-1 является их аэродинамика. При высоких скоростях прижимная сила, создающая сопротивлением воздуха позволяет болидам проходить повороты при более высоких скоростях. Данная сила направлена вертикально вниз, зависит только от скорости машины и ее можно описать следующим уравнением: $F = kv^2$, где $k = 7$ кг/м. Ускорение болида при повороте полностью осуществляется за счет трения между шинами и трассой.

2. Найдите минимальный коэффициент трения между шиной и трассой для прохождения поворота, описанного выше при постоянной скорости $v_{min} = 160$ км/ч. Масса болида $M = 798$ кг, гонщика $m = 72$ кг. Округлите ответ до двух значащих цифр.

Во время гонки шины изнашиваются и коэффициент трения падает. По этой причине возникает потребность для смены шин. Зависимость коэффициента трения от пройденного расстояния можно грубо описать следующим образом: $\frac{d\mu}{dl} = -\frac{\mu - \mu_{min}}{\lambda}$, где $\lambda = 16$ км, $\mu_{min} = 0,7$. Изначально, коэффициенты трения шин равны $\mu_0 = 1.7$, а заменяют их, когда его значение достигает величины, найденной в прошлом пункте.

3. Сколько полных кругов болид сможет проехать с начало гонки до замены шин, если длина одного круга $l_0 = 5,793$ км(это реальная длина автодрома Монца).

Задачи Младшей лиги

Задача 1: Машинка в ловушке *(Амирбек Азатбеков)*

Аргын нашёл в подсобке игрушечную машинку на батарейках из своего детства и решил с ней поиграть. Он направил машинку к импровизированной ловушке – пропасти, которую она не сможет преодолеть – и с помощью пульта заставил её ускоряться из состояния покоя. Масса машинки с батарейками составляет $m = 0.5$ кг. Непосредственно перед падением машинки в пропасть её скорость была равна $v = 18$ км/ч.
Примечание. Во всех пунктах примите следующие допущения: колеса машинки не скользят на протяжении всего движения; трение качения отсутствует; сопротивление воздуха отсутствует; КПД двигателя машинки равен 100%, т.е вся энергия батарейки расходуется только на её разгон.

1. Найдите кинетическую энергию E_K машинки с батарейками непосредственно перед падением в пропасть.

2. Найдите механическую работу A, совершенную над системой *«машинка-батарейки»* с начала движения до момента непосредственно перед падением.

3. Найдите изменение **полной** энергии системы *«машинка-батарейки»* с начала движения до момента непосредственно перед падением.

Задача 2: Расслабьтесь и отдохните *(Амирбек Азатбеков)*

Свинцовый шар массой $M = 1$ кг находится на высоте $h = 34$ м над массивным, идеально теплоизолированным калориметром. Начальная температура шара составляет $0\,°\mathrm{C}$. Калориметр содержит большое количество смеси воды и льда при температуре $0\,°\mathrm{C}$. Шар отпускают, в результате чего он падает, погружается в содержимое калориметра и полностью останавливается. Шар до падения находился при температуре $0\,°\mathrm{C}$

Ускорение свободного падения $g = 10$ м $\cdot$ с$^{-2}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж $\cdot$ кг$^{-1}$, удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж $\cdot$ кг$^{-1} \cdot$ К$^{-1}$).

1. Какая механическая энергия W шара перейдёт в теплоту при его падении и полной остановке в калориметре?

2. Какая масса льда m_1 расплавится в результате этого падения?

3. Теперь эксперимент повторяют, но шар предварительно нагревают до температуры $t = 100\,°C$. Какую массу льда m_2 удастся расплавить в этом случае? Считайте, что не весь лёд в калориметре растает.

Задача 3: КвЕКИКВБ *(Роман Черемнов)*

Дисклеймер: все совпадения с реальными людьми в этой задаче случайны. Ернур любит размерности. Он решил, что скучно всегда решать в СИ, поэтому на каждой олимпиаде он изобретает новую(пожалуйста не делайте так) Однажды на респе, он снова взялся за это. Отчётливо слыша, как из соседней комнаты раздаётся кваканье лягушек которых препарировали биологи он решил взять за единицу времени 1 Квак = 1 Кв ≈ 0.3 с, который равен средней продолжительности квака лягушки. После он вспомнил, что недавно вырос и решил взять за единицу длины 1 Ернур Кайроллаев = 1 ЕК ≈ 1.81 м. А за единицу массы он решил взять массу набора своих игральных карт 1 Набор игральных карт = 1 ИК ≈ 114 г

1. Найдите среднюю скорость Юпитера в этих единицах. $v_{\text{Юпитер}} = 13.07$ км/с

2. Давайте условимся измерять силу в Вовах. Найдите сколько Ньютонов в одном Вове. Вова определяется аналогично Ньютону, через фундаментальные единицы системы КвЕКИКВБ

3. Будем измерять количество вещества не в молях, а в бабочках, потому что они красивее. Считая, что при стандартных условиях в 1 Ернур^3 водорода, содержится 3 бабочки найдите, сколько моль в одной бабочке.

Задача 4: Подсолнечное масло *(Бекасыл Елубай)*

Внимание: все ответы вводите в см, при необходимости округляйте ответы с двумя значащими цифрами после запятой.
Как-то раз Рома решил провести ряд экспериментов с маслом. У Ромы имелись цилиндрическая посуда радиусом $R = 10$ см и тонкостенная труба с радиусом $r = 5$ см, которая вертикально погружалась в посуду. Нижний конец трубы мог устанавливаться на фиксированной высоте относительно дна цилиндра.
Плотность воды $\rho_w = 1000$ кг/м^3, плотность масла $\rho_{oil} = 800$ кг/м^3.
Сперва Рома налил в цилиндр некоторое количество воды, затем установил трубу, так что уровень воды в цилиндре был на высоте $h_0 = 6$ см относительно нижнего конца трубы.

1. Рома начал наливать внутрь трубы масло, пока нижний уровень масла не опустится до нижнего конца трубы. Найдите высоту столба масла (h_{oil}) внутри трубы. Рома довольно аккуратный, и налитое масло не перешло из трубы в цилиндр.

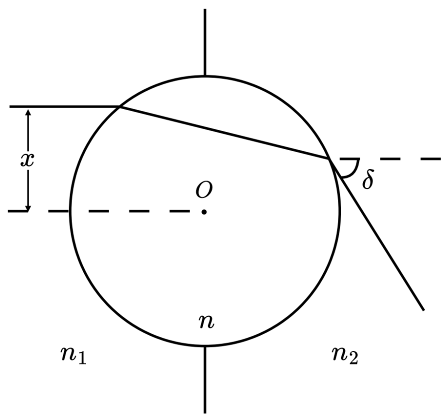
2. После этого Рома просто убрал трубу. Найдите толщину масляного слоя, образовавшегося на поверхности воды.

Рома на этом не остановился и пошел дальше. Он обратно вставил трубу в цилиндр, так, чтобы её нижний конец находился на той же высоте относительно дна, что и в начале. Жидкости в цилиндре он не трогал, они оставались в равновесном состоянии, установившемся после второго пункта (т.е. слой масла покоится на поверхности воды). После установления трубы наружная и внутренняя часть оставались в таком же положении как до установлении. Рома взял спичку и поджег масло внутри трубы. Во время горения масло внутри трубы испаряется, а пламя не распространяется на наружную часть трубы.

3. Может ли наступить момент, когда масло из наружной части трубы начнет перетекать во внутреннюю? Чтобы ответить "Да/Нет"введите "1/0"соответственно. При каком диапазоне радиусов трубы (r), если радиус цилиндра зафиксирован $R = 10$ см, возможно, что масло из цилиндра (с внешней стороны трубы) будет перетекать внутрь трубы в процессе горения? Введите в виде ответа минимальный и максимальный радиус трубы.

Задача 5: Геомка *(Амир Пшенбаев)*

Имеется система из двух внешних сред с показателями преломления n_1 и n_2. Посередине между ними расположен стеклянный шар с показателем преломления n. Параксиальный пучок света направляется в сторону сферы с прицельным параметром x, перпендикулярно границе, разделяющей две внешние среды (см. рисунок). Радиус шара $R = 1$ м, а показатели преломления равны $n = 1.50$, $n_1 = 1.33$ и $n_2 = 1.00$. Таким образом, выполняется условие $n > n_1 > n_2$.



1. Найдите критическое расстояние x_c, при котором для лучей с $x > x_c$ происходит полное внутреннее отражение на границе раздела сред n и n_2.

2. Исходя из предыдущего пункта, найдите максимальный угол отклонения δ от начального направления, под которым свет выходит во вторую среду n_2.

Задача 6: Дженга *(Амирбек Азатбеков)*

Десять одинаковых, однородных прямоугольных кирпичей кладут друг на друга, образуя стопку со смещением. Каждый следующий кирпич сдвигают относительно предыдущего так, чтобы добиться максимального горизонтального выступа. Конструкция находится в состоянии равновесия.

Длина одного кирпича $L = 25$ см.

1. Найдите максимальную возможную горизонтальную длину D получившейся конструкции (расстояние от левого края самого нижнего кирпича до правого края самого верхнего кирпича).

2. Для конфигурации с максимальной длиной D определите горизонтальную координату x_{CM} общего центра масс всей системы из 10 кирпичей. В качестве начала отсчета ($x = 0$) выберите левый край самого нижнего кирпича.

Задача 7: Упруго или неупруго? *(Амир Пшенбаев)*

Два материальных шара (точечные массы m_1 и m_2, где $m_1 \neq m_2$) подвешены в одной точке на потолке с помощью невесомых нитей одинаковой длины $l = 1$ м. Оба шара отклоняют в противоположные стороны на одинаковую вертикальную высоту $h = 0.2$ м от наинизшей точки траектории. Затем оба шара одновременно отпускают. Считайте, что размерами шаров можно пренебречь.

Предположим, шары сталкиваются абсолютно упруго в наинизшей точке.

1. Чему равны скорости v_1 и v_2 шаров сразу после соударения для $m_1 = 0.1$ кг и $m_2 = 0.3$ кг?

2. На какие максимальные высоты h_1 и h_2 поднимутся шары после соударения для тех же m_1 и m_2 что и в 1-ом пункте?

3. Считайте теперь, что отношение масс m_1/m_2 может быть выбрано произвольным образом. Чему равна максимально возможная высота подъема $h_{\max}$ для шара m_1?

Пусть теперь соударение шаров в наинизшей точке является абсолютно неупругим.

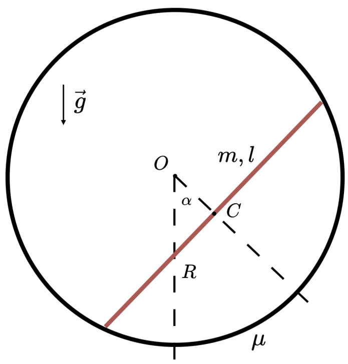
4. Чему равна скорость v объединенного тела сразу после соударения для $m_1 = 0.2$ кг и $m_2 = 0.3$ кг?

5. На какую максимальную высоту H поднимется объединенное тело после соударения для тех же m_1 и m_2 что и в 4-ом пункте?

6. Теперь считайте, что отношение масс m_1/m_2 может быть выбрано произвольным образом. Чему равна максимально возможная высота подъема $H_{\max}$ для объединенного тела?

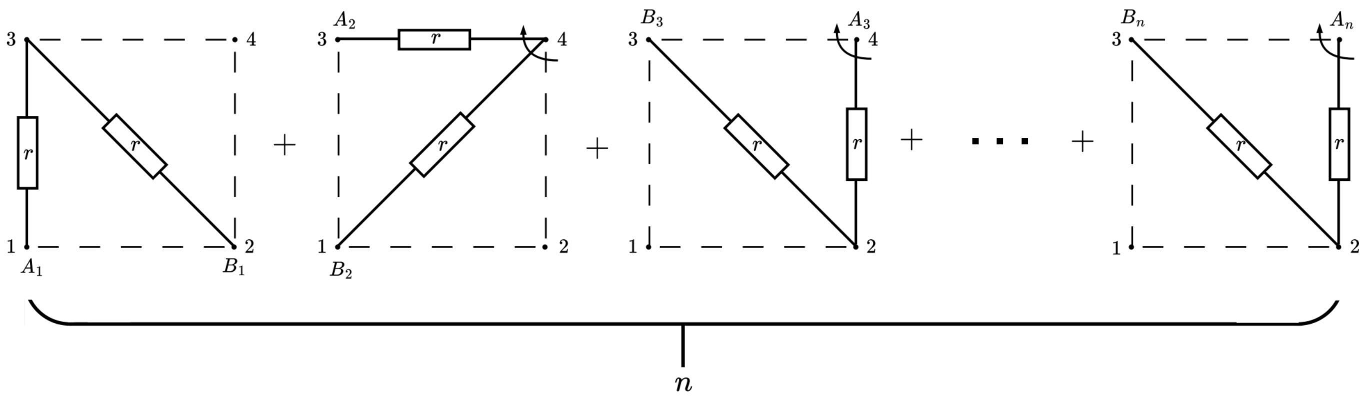
Задача 8: Равновесие стержня *(Амир Пшенбаев)*

Стержень однородной плотности длины $l = 1.5$ м и массы m находится внутри полой сферы радиуса $R = 1$ м. Известно, что коэффициент трения между стержнем и внутренней поверхностью сферы равен $\mu = 0.3$. Найдите максимально возможный угол отклонения центра стержня от вертикали α, при котором стержень еще находится в равновесии (см. рисунок).



Задача 9: R_n-язанская башня *(Владимир Литвинов)*

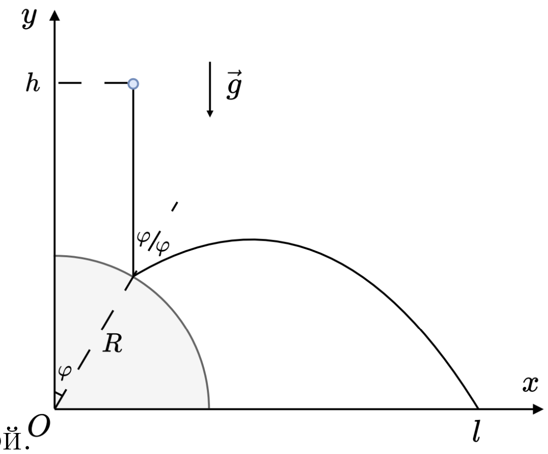
Имеется резисторный элемент — «уголок», состоящий из двух одинаковых резисторов сопротивлением $r = 1$ Ом, соединенных последовательно. Концы этого элемента могут быть подключены к клеммам 1, 2, 3, 4, которые расположены в вершинах квадрата. Концы первого элемента подключают к клемам 1, 3, 2, как показано на рисунке.



Затем к этим же клеммам последовательно подключают $n-1$ одинаковых уголков: каждый последующий элемент поворачивается на $90°$ по часовой стрелке относительно предыдущего. Начало i-го уголка обозначено как A_i, а конец — как B_i. Общая схема подключения n элементов показана на рисунке.

1. Найдите эквивалентное сопротивление R_2 между точками A_1 и B_2 для $n = 2$.
2. Найдите эквивалентное сопротивление R_3 между точками A_1 и B_3 для $n = 3$.
3. Найдите эквивалентное сопротивление R_4 между точками A_1 и B_4 для $n = 4$.
4. Выведите общую формулу для эквивалентного сопротивления R_n между точками A_1 и B_n в зависимости от n и r.

Задача 10: Эффективная траектория *(Амир Пшенбаев)*



Небольшой мячик (материальная точка) свободно отпускают с фиксированной высоты $h = 1.5$ м над центром O большой неподвижной полусферы радиуса $R = 0.5$ м. В результате падения мячик абсолютно упруго отражается от поверхности полусферы и далее движется по баллистической траектории, как показано на рисунке. Точка удара на поверхности полусферы определяется углом φ, отсчитываемым от вертикали y. Считайте, что угол φ является переменной величиной.

1. Для фиксированного угла удара $\varphi = \varphi_0 = 36°$, найдите расстояние l, которое пройдёт мячик по горизонтали (по оси x), отсчитываемое от центра O полусферы.

2. Для произвольного угла удара φ найдите его критическое значение $\varphi = \varphi_c$, при котором горизонтальное удаление мячика (расстояние l) будет максимально возможным. Для этого вы можете использовать любой разумный метод, главное получить ответ с точностью до 1 цифры после запятой.

Решения задач Старшей лиги

Задача 1: Алмазный термометр *(Бекасыл Елубай)*

1. Теплообмен между двумя точками в общем случае записывается следующим образом:

$$P = kS\frac{\Delta T}{\Delta l} \tag{1.1}$$

Запишем данное уравнение для трех пары точек, от левого конца до точки контакта и от него до свободных концов стержней:

$$P_0 = kS\frac{3(t_1 - t_2)}{2l} \tag{1.2}$$

$$P_1 = kS\frac{3(t_2 - t_0)}{l} \tag{1.3}$$

$$P_2 = kS\frac{2(t_2 - t')}{l} \tag{1.4}$$

Из условия стационарности следует, что поток тепла сохраняется: $P_0 = P_1 + P_2$. Вставляя в данное уравнение предыдущие три уравнения получаем связь между температурами и разрешая его получаем искомый ответ:

$$t' = \frac{2}{13}\left(3t_0 + 2t_2 + \frac{3}{2}t_1\right) \approx 26.2^\circ \text{ C} \tag{1.5}$$

2. Можем связать параметры n-ного звена с самым первым: $P_n = P_0/3^n; l_n = l_0/2^n; S_n = S_0/2^n$. Уравнение теплообмена для n-ного звена цепи записывается следующим образом:

$$\Delta t_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{P_0 l_0}{kS_0} \tag{1.6}$$

Разность температур между резервуарами и есть сумма данной величины от 0 до бесконечности.

$$t_1 - t_r = \sum \Delta t_n = \Delta t_0 \sum_0^\infty \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}\Delta t_0 \tag{1.7}$$

Разность температур на концах первого стержня: $\Delta t_0 = t_1 - t_i$. Оьбединяя с предыдущим уравнением, приходм к ответу:

$$t_r = \frac{3}{2}t_i - \frac{1}{2}t_1 = 40^\circ \text{ C} \tag{1.8}$$

3. Масса n-ного звена - $m_n = \rho S_n l_n = m_0/4^n$, а их количество - $N = 3^n$. Суммируя массу на каждом этапе разветвления находим массу всей цепочки:

$$M = \sum N m_n = m_0 \sum_0^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^n = 4m_0 = 4\rho S_0 l_0 = 716.8 \text{ г} \tag{1.9}$$

Содержание	**Баллы**
$t = 26.2^\circ$ C	3
$t_r = 40^\circ$ C	5
$M = 716.8$ г	2

Задача 2: Муха Медали *(Роман Черемнов)*

1. Найдём силу от участка нити под углом α к направлению рывка мухи.

$$dF = -kx\cos\alpha \tag{2.1}$$

Спроецируем её на направление рывка мухи

$$dF_x = \cos\alpha dF = -kx\cos^2\alpha \tag{2.2}$$

Чтобы найти полную возвращающую силу домножим на $\frac{N}{2\pi}d\alpha$ - количество нитей на единицу угла и проинтегрируем по $d\alpha$

$$F = -\frac{N}{\pi}\int_0^\pi kx\cos^2\alpha d\alpha = -\frac{N}{2}kx \tag{2.3}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{Nk}}} = 8.88 \cdot 10^{-3} \text{ с} \tag{2.4}$$

2. Найдём новую длину нити после смещения мухи на x

$$l(x) = \sqrt{l_0^2 + x^2} \tag{2.5}$$

Тогда удлинение будет равно

$$\Delta = l(x) - l_0 \approx \frac{x^2}{2l} \tag{2.6}$$

С помощью этого найдём силу и сразу спроецируем её на направление движения использовав $\cos\alpha \approx \frac{x}{l}$

$$f = -k\frac{x^2}{2l}\cos\alpha \approx -k\frac{x^3}{2l^2} \tag{2.7}$$

Умножая на количество нитей и подставляя во второй закон Ньютона

$$m\ddot{x} = -Nk\frac{x^3}{2l} \tag{2.8}$$

Прекрасное уравнение, что, как изначально не было замечено Ромой, не решается аналитически. **Решением академического комитета за этот пункт баллы выставляться не будут.**

3. Муха на максимальном смещении не имеет скорости, а значит энергия чисто потенциальная.

$$\frac{k\left(l'-l\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \tag{2.9}$$

$$N\frac{kl^2}{32} = \frac{mv^2}{2} \tag{2.10}$$

$$v = \sqrt{\frac{Nkl^2}{16m}} = 12.5 \text{ мс}^{-1} \tag{2.11}$$

Содержание	**Баллы**
$T = 8.88 \cdot 10^{-3}$ с	4
$m\ddot{x} = -Nk\frac{x^3}{2l}$ и решено аналитически	Респект от Ромы
$v = 12.5$ мс$^{-1}$	2

Задача 3: Сон Илона Маска *(Бекасыл Елубай)*

1. Используя 3 закон Кеплера можем связать полуоси и периоды двух спутников и найти период второго спутника:

$$\frac{a_0^3}{T_0^2} = \frac{(\eta a_0)^3}{T_2^2} \to T_2 = T_0\eta^{3/2} = \frac{3}{2}T_0 \tag{3.1}$$

Как мы видим период второго тела в полтара раза больше первого. Первое столкновение произойдет когда оба тела совершут целое количество периодов, что произойдет после трех периодов первого спутника. Следовательно, тела столкнутся через $\tau = 3T_0 \to \gamma = 3$.

2. При стлокновении скорости тел перпендикулярны друг к другу. Закон сохранения импульса для данного случая запишется следующим образом:

$$2mv' = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} \tag{3.2}$$

Как мы видим, нам необходимо выразить скорость второго спутника через первого. Для этого запишем закон сохранения энергии для второго тела(здесь и во всех последующих уравнениях будут записаны не сами энергии, а энергия на единицу массы).

$$E = -\frac{GM}{2a_2} = -\frac{GM}{a_0} + \frac{v_2^2}{2} \tag{3.3}$$

Для кругого движения первого тела скорость выражется следующим образом: $v_1^2 = GM/a_0$. Учитывая это и разрешая предыдущее уарвнения относительно v_2, выражаем скорость второго через первого спутника.

$$v_2^2 = GM\left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a_2}\right) = v_1^2\left(2 - \frac{1}{\eta}\right) \tag{3.4}$$

Подставляем данное выражение в уравнение () и получаем искомый ответ:

$$\frac{v'}{v_1} = \kappa = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \frac{1}{\eta}} \approx 0.748 \tag{3.5}$$

3. Сперва стоит расписать энергию для спутников и посмотреть какую траекторию она будет иметь.

$$\varepsilon = -\frac{GM}{a_0} + \frac{v'^2}{2} = \frac{v'^2}{2} - v_1^2 \approx -0.72v_1^2 \tag{3.6}$$

Как мы видим энергия тела отрицательна, из чего следует, что тело будет двигаться по эллипсу. В изначальной точке скорость перпендикулярна к радиус вектору, значит это либо перицентр, либо апоцентр. В предыдущем пункте мы выяснили, что скорость v' меньше чем круговая скорость v_1. Следовательно, данная точка и является апоцентром. Ответ: $\alpha = 1$.

Содержание	**Баллы**
$\gamma = 3$	2
$\kappa = 0.748$	5
$\alpha = 1$	3

Задача 4: One Phys *(Роман Черемнов)*

1. Найдём массу камня

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \tag{4.1}$$

Тогда найдём энергию затраченную на подъём камня. Фудзитора создаёт поле направленное противоположно Земному с вдвое большей напряженностью, работа, которое совершает это поля равна затраченной Фудзиторой энергии.

$$E_1 = 2Mgh \tag{4.2}$$

Но это ещё не всё! Фудзитора *создаёт* гравитационное поле это требует очень много энергии. По аналогии с энергией конденсаторов.

$$\omega = \frac{g^2}{8\pi G} \tag{4.3}$$

Поле с напряженностью $2g$ создаётся в цилиндре радиуса r. Найдём энергию требуемую для этого

$$E_2 = \pi r^2 h \frac{(2g)^2}{8\pi G} = \frac{g^2 r^2 h}{2G} \tag{4.4}$$

Итого

$$E = E_1 + E_2 = \frac{g^2 r^2 h}{2G} + 2Mgh = \frac{g^2 r^2 h}{2G} + \frac{8}{3}\pi r^3 \rho g h \approx 1.87 \cdot 10^{16} \text{ Дж} \tag{4.5}$$

Как можно заметить, затратами Фудзиторы на подъём камня можно пренебречь. Результирующая энергия меньше затраченной, это связано с тем, что энергия выделяется при взаимодействии полученных полей за счёт их противоположности их направлений. **2.** Найдём новую высоту, так как у камня энергия Mgh, то поднимется он ещё на h. Тогда найдём энергию поля в новом цилиндре высотой $2h$. Здесь, поля сонаправлены, тогда нам потребуется дополнительная энергия, так как создать поле в месте, где поле уже есть - "сложнее".

$$E \approx \frac{(10g)^2 - g^2}{8\pi G}\pi r^2 2h = \frac{99 g^2 r^2 h}{4G} \approx 9.28 \cdot 10^{17} \text{ Дж} \tag{4.6}$$

3. Ну здесь без фокусов. Просто считаем энергию камня

$$K = 20Mgh = \frac{880}{3}\pi r^3 \rho g h \approx 2.62 \cdot 10^{11} \text{ Дж} \tag{4.7}$$

Содержание	**Баллы**
$E \approx 1.87 \cdot 10^{16}$ Дж	4
$E \approx 9.28 \cdot 10^{17}$ Дж	4
$K \approx 2.62 \cdot 10^{11}$ Дж	2

Задача 5: Геомка *(Амир Пшенбаев)*

1. Распишем все углы для пучка проходящего через сферу. Обозначим α - угол падения луча перпендикулярно поверхности сферы, а угол β - угол преломления луча в сфере n. Второе преломление между средами n и n_2 происходит также под углом β, так как в рассматриваемом треугольнике, стороны напротив друг другу равны R (см рисунок). Из закона Снеллиуса для первого преломления

$$n_1 \sin\alpha = n \sin\beta. \tag{5.1}$$

А для второго преломления выполняется

$$n \sin \beta = n_2 \sin \theta = n_1 \sin \alpha. \tag{5.2}$$

Для того что бы происходило внутренние отражение между средами n и n_2 должно выполняться что $\sin \theta > 1$, то есть

$$\sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha > 1. \tag{5.3}$$

Из геометрии также очевидно что $\sin \alpha = x/R$. Поэтому

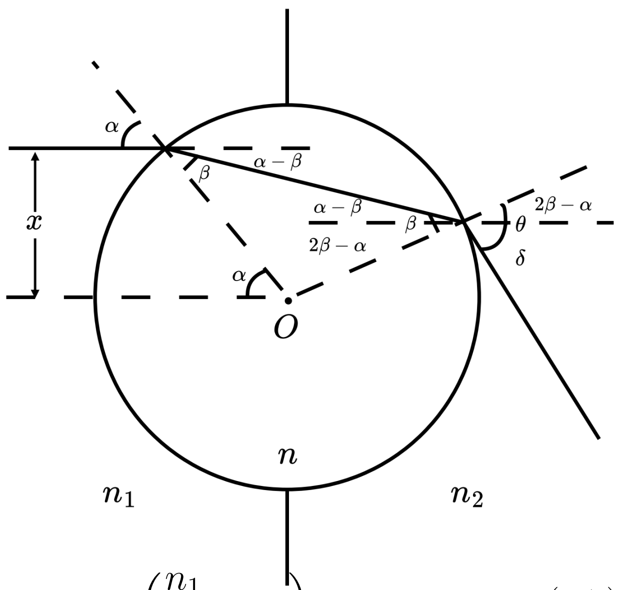
$$\frac{n_1 x}{n_2 R} > 1 \Rightarrow x > \frac{n_2}{n_1} R = x_c. \tag{5.4}$$

Откуда получаем что

$$x_c = \frac{n_2}{n_1} R \approx 0.75 \text{ м}. \tag{5.5}$$

2. Как видно из геометрии показанной на рисунке выше, угол отклонение от начальной траектории δ находится как

$$\delta = \theta - (2\beta - \alpha) = \theta + \alpha - 2\beta. \tag{5.6}$$



Выражая θ и β через α, находим что

$$\sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha\right),$$

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n} \sin \alpha \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n} \sin \alpha\right),$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha\right) + \alpha - 2 \arcsin\left(\frac{n_1}{n} \sin \alpha\right). \tag{5.7}$$

Из этого уравнения видно что при увеличение α, также увеличивается δ. Максимальное отклонение δ можно найти из условия того что аргумент арксинуса не может быть больше 1, или другими словами, $\theta = 90°$. Тогда получаем что

$$1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{5.8}$$

Подставляя α в уравнение для δ, окончательно получаем

$$\delta = 90 + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{n_2}{n}\right) \approx 55.1°. \tag{5.9}$$

Содержание	**Баллы**
$x_c = 0.75$ м	5
$\delta = 55.1°$	5

Задача 6: ~~Многоклеточный~~ Многоатомный *(Владимир Литвинов)*

Для политропического процесса выполняется

$$\alpha P dV = V dP \tag{6.1}$$

Первый закон термодинамики

$$\nu k R dT = \frac{i}{2}\nu R dT + dA \tag{6.2}$$

Продифференцируем уравнение Менделеева-Клапейрона

$$d(PV) = \nu R dT \tag{6.3}$$

$$P dV + V dP = \nu R dT \tag{6.4}$$

$$P dV(\alpha + 1) = \nu R dT \tag{6.5}$$

$$dA = P dV \tag{6.6}$$

$$dA(\alpha + 1) = \nu R dT \tag{6.7}$$

Подставим всё в 6.2 и получим

$$\nu k R dT = dA\left(1 + i\frac{\alpha + 1}{2}\right) \tag{6.8}$$

Используя 6.7 получаем выражение для α

$$k = \frac{i(\alpha + 1) + 2}{2(\alpha + 1)} \tag{6.9}$$

Выражая α

$$\alpha = \left(k - \frac{i}{2}\right)^{-1} - 1 \tag{6.10}$$

Подставляя все пары i и k получаем

$$\alpha = 5 \tag{6.11}$$

$$5 P dV = V dP \tag{6.12}$$

Содержание	Баллы
$5PdV = VdP$	10

Задача 7: Подобие ~~треугольников~~ *(Роман Черемнов)*

1. Приравняем время падения бусинки в времени падения мячика

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \tag{7.1}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \tag{7.2}$$

$$\eta = \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \approx 4.08 \tag{7.3}$$

Также принимается величина обратная η, $\frac{1}{\eta} \approx 0.244$

2.

$$\frac{v_1}{v_2} = \eta \tag{7.4}$$

$$v_2 = \frac{v_1}{\eta} = 0.735 \text{ мс}^{-1} \tag{7.5}$$

3. Составим систему уравнений для определения скорости и ускорения

$$\frac{2u}{a} = t \tag{7.6}$$

$$\frac{u^2}{2a} = l \tag{7.7}$$

$$u = \frac{4l}{t} \approx 1.333 \text{ (или } 1.308) \ \text{ мс}^{-1} \tag{7.8}$$

$$a = \frac{2u}{t} \approx 4.444 \text{ (или } 4.277) \ \text{ мс}^{-2} \tag{7.9}$$

Содержание	Баллы
$\eta = 4.08$ или $\eta = 0.244$	3
$v_2 = 0.735$ мс$^{-1}$	2

$u = 1.333$ (или 1.308) мс$^{-1}$ и $a = 4.444$ (или 4.277) мс$^{-2}$	5

Задача 8: Движение электрона в поле *(Амир Пшенбаев)*

1. Расписывая силу действующую на электрон от электрического поля по осям, получаем

$$ma_x = -eE_0\cos\alpha \Rightarrow a_x = -\frac{eE_0}{m}\cos\alpha, \tag{8.1}$$

$$ma_y = eE_0\sin\alpha \Rightarrow a_y = \frac{eE_0}{m}\sin\alpha. \tag{8.2}$$

Из уравнения движения для горизонтальной компоненты

$$v_{1x}^2 = v_0^2 + 2a_x d, \tag{8.3}$$

$$v_{1x} = v_0 + a_{1x}t. \tag{8.4}$$

где t - время движение электрона в поле. Объединяя два уравнения с учетом выражения для a_x, получаем что

$$t = \frac{v_{1x} - v_0}{a_{1x}} = \frac{mv_0}{eE_0\cos\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2}}\right). \tag{8.5}$$

Вертикальную компоненту скорости находим как

$$v_{1y} = a_y t. \tag{8.6}$$

Подставляя выражение для t и a_y, получаем что

$$v_{1y} = v_0\tan\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2}}\right). \tag{8.7}$$

Далее, угол β можно найти из отношении скоростей

$$\tan\beta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \tan\alpha\frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2}}} \approx 0.4370. \tag{8.8}$$

Тогда, угол β равен

$$\beta \approx 23.6^\circ \tag{8.9}$$

2. Конечную скорость v_1 найдем возведя квадрат компоненты v_{1x} и v_{1y}. Для простоты найдем сначало численные ответы для компонент скоростей.

$$v_{1x} = v_0\sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2}} \approx 0.569v_0 \approx 85.38 \text{ км/с},$$

$$v_{1y} = v_0 \tan\alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2}}\right) \approx 37.31 \text{ км/с}.$$

Откуда находим что

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} \approx 93.2 \text{ км/с}. \tag{8.10}$$

Или аналитически

$$v_1 = v_0\sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2} + \tan^2\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2eE_0 d\cos\alpha}{mv_0^2}}\right)^2} \approx 93.2 \text{ км/с}.$$

3. В магнитном поле электрон будет двигаться по окружности радиуса R. Так как сила действующая на электрон всегда будет перпендикулярна его движению, скорость электрона всегда остается постоянной и равной v_0. Очевидно что

$$ma_n = ev_0 B_0, \tag{8.11}$$

где a_n - центростремительное ускорение, которое равно $a_n = v_0^2/R$. Значит, радиус кривизны R равен

$$R = \frac{mv_0}{eB_0}. \tag{8.12}$$

Тогда угол который электрон пройдет по окружности радиуса R равен углу поворота скорости v_2 относительно начальной скорости v_0. Из геометрии очевидно что

$$R\sin\varphi = d, \tag{8.13}$$

откуда получаем что

$$\varphi = \arcsin\frac{d}{R} = \arcsin\frac{eB_0 d}{mv_0} \approx 27.9°. \tag{8.14}$$

4. Как было сказано ранее, скорость электрона остается постоянной в магнитном поле. Значит,

$$v_2 = v_0 = 150 \text{ км/с}. \tag{8.15}$$

5. *1-ый метод.* Обозначим v_x и v_y скорости электрона в произвольной точке пространства. Тогда, расписывая силы по компонентам, получаем что

$$ma_x = -ev_y B_0 - eE_0, \tag{8.16}$$

$$ma_y = ev_x B_0. \tag{8.17}$$

С учетом что $a_y = dv_y/dt$, а $v_x dt = dx$, уравнение движение для y компоненты можно записать как

$$m\frac{dv_y}{dt} = ev_x B_0 \Rightarrow m dv_y = eB_0 dx.$$

Взяв начало координат в точке входа электрона в поле и у с учетом того что $v_y = 0$ при $x = 0$, получаем что

$$m\int_0^{v_y} dv_y = eB_0\int_0^x dx \Rightarrow v_y = \frac{eB_0 x}{m} \tag{8.18}$$

Подставляя это в уравнение для a_x, получаем

$$a_x = -\left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 x - \frac{eE_0}{m}.$$

С учетом того что $a_x = \ddot{x}$,

$$\ddot{x} + \left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 x + \frac{eE_0}{m} = 0. \tag{8.19}$$

Обозначим $\omega_0 = eB_0/m$, а $\omega_0^2 x + eE_0/m = \omega_0^2 u$. Тогда уравнение приводится к виду

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0.$$

Данное уравнение имеет вид уравнения гармонических колебаний. Значит, решение для u будет

$$u = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A - амплитуда u, а φ_0 - некая начальная фаза, определяющаяся начальным условием. Подставив u в уравнение для x, получаем

$$x = u - \frac{eE_0}{m\omega_0^2} = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \tag{8.20}$$

Из начального условия, мы знаем что $x(0) = 0$, а $v(0) = v_0$. Тогда,

$$x(0) = A\cos\varphi_0 - \frac{eE_0}{m\omega_0^2} = 0 \Rightarrow A\cos\varphi_0 = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} = \frac{mE_0}{eB_0^2} \tag{8.21}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = -\omega_0 A\sin\varphi_0 = v_0 \Rightarrow A\sin\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0} = -\frac{mv_0}{eB_0}. \tag{8.22}$$

Подставляя эти коэффициенты в уравнение для x, получаем что

$$x = \frac{mv_0}{eB_0}\sin\omega_0 t - \frac{mE_0}{eB_0^2}\left(1-\cos\omega_0 t\right) \tag{8.23}$$

Дифференцируя x по времени, найдем что

$$v_x = v_0\cos\omega_0 t - \frac{E_0}{B_0}\sin\omega_0 t \tag{8.24}$$

Подставив x в уравнение (8.18), найдем также что v_y

$$v_y = v_0\sin\omega_0 t - \frac{E_0}{B_0}(1-\cos\omega_0 t) \tag{8.25}$$

Обозначим теперь T - временем движения электрона в поле. Тогда, найдем его из условия что

$$x(T) = d = \frac{\sqrt{3}\,mv_0}{2eB_0} - \frac{eE_0}{2eB_0^2} = \frac{mv_0}{eB_0}\sin\omega_0 T - \frac{mE_0}{eB_0^2}\left(1-\cos\omega_0 T\right). \tag{8.26}$$

То есть,

$$\frac{mv_0}{eB_0}\left(\sin\omega_0 T - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{mE_0}{eB_0^2}\left(\cos\omega_0 T - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{8.27}$$

Из этого уравнение вам может показаться очевидным что

$$\omega_0 T = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{\pi m}{3eB_0}. \tag{8.28}$$

Но нет! На самом деле, существуют другое решение для T которое меньше чем $T = \pi m/3eB_0$.
Перепишем уравнение (8.27) в виде

$$v_0\left(\sin\omega_0 T - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{E_0}{B_0}\left(\cos\omega_0 T - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\left(v_0\sin\omega_0 T + \frac{E_0}{B_0}\cos\omega_0 t\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right) \tag{8.29}$$

Обозначим теперь

$$w_0\cos\delta = v_0, \tag{8.30}$$

$$w_0\sin\delta = E_0/B_0, \tag{8.31}$$

где w_0 - некая константа. Тогда, просуммировав квадраты уравнений (8.30) и (8.31), можно найти что

$$w_0 = \sqrt{v_0^2 + \frac{E_0^2}{B_0^2}}, \tag{8.32}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{E_0}{B_0 v_0}\right) \tag{8.33}$$

Подставим теперь (8.30) и (8.31) в (8.29)

$$w_o\left(\sin\omega_0 T\cos\delta + \cos\omega_0 T\sin\delta\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right)$$

Используя тригонометрическую формулу для синуса и подставив (8.32), это можно переписать как

$$\sqrt{v_0^2 + \frac{E_0^2}{B_0^2}}\sin(\omega_0 T + \delta) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}v_0 + \frac{E_0}{B_0}\right)$$

Следовательно,

$$\omega_0 T + \delta = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\dfrac{\sqrt{3}v_0}{2} + \dfrac{E_0}{2B_0}}{\sqrt{v_0^2 + \dfrac{E_0^2}{B_0^2}}}\right) + k\pi$$

где k - 0 и целые числа. Подставив δ из (8.33), найдем что

$$\omega_0 T = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\dfrac{\sqrt{3}v_0}{2} + \dfrac{E_0}{2B_0}}{\sqrt{v_0^2 + \dfrac{E_0^2}{B_0^2}}}\right) + k\pi - \arctan\left(\frac{E_0}{B_0 v_0}\right) \tag{8.34}$$

Для упрощения, подставим все численные значения v_0, B_0, и B_0. Тогда,

$$\omega_0 T = (-1)^k 1.3997 + k\pi - 0.6947$$

Для $k = 0$

$$T = \frac{0.2244\pi}{\omega_0}.$$

Примечательно что для $k = 1$

$$T_1 = \frac{\pi}{3\omega_0}.$$

Как и было сказано ранее, это означает что частица выйдет из поля раньше чем $T_1 = \pi/3\omega_0$. Значит, полное время пребывания частицы в поле равно

$$T = \frac{0.2244\pi}{\omega_0}. \tag{8.35}$$

После выхода частицы из поля, на нее больше не будет действовать никакие силы, а значит она будет двигаться с постоянной скоростью и уравнения (8.24) и (8.25) для $t > T$ больше не применимы.
Используя теперь T из (8.35) и подставив его в (8.24) и (8.25), найдем что

$$v_{3x} = v_x(T) \approx 0.7616 v_0 - 0.6480 \frac{E_0}{B_0} \approx 33.24 \text{ км/с}, \tag{8.36}$$

$$v_{3y} = v_y(T) \approx 0.6480 v_0 - 0.2384 \frac{E_0}{B_0} \approx 67.40 \text{ км/с}. \tag{8.37}$$

Тогда, наконец, получаем что

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_{3y}}{v_{3x}}\right) \approx 63.7^\circ. \tag{8.38}$$

Так как численный ответ может варьироваться в зависимости от того как вы округляли, ответы в диапазоне $\pm 0.5^\circ$ также принимаются верными.
6. Полная скорость с которой частица выйдет из поля, очевидно, равна

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} \approx 75.2 \text{ км/с}.$$

Снова, из-за округления, ответы в диапазоне ± 0.1 км/с также принимаются верными.

5-6. *2-ой метод.* Можно также решить это все намного быстрее через энергию. Так как магнитная сила всегда перпендикулярно общей скорости частицы, магнитное поле не совершает никакую работу. Работа совершается только электрическим полем. Тогда, запишем энергию частицы до и после пребывания в поле с учетом этой работы, откуда можно сразу найти конечную скорость v_3:

$$\frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -eE_0 d \Rightarrow v_3 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2eE_0 d}{m}} \tag{8.39}$$

Подставив d, находим что

$$v_3 = \sqrt{v_0^2 - \frac{E_0}{B_0}\left(\sqrt{3} v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)} \approx 75.2 \text{ км/с}. \tag{8.40}$$

Используя теперь уравнение (8.18) и снова подставив d, найдем что

$$v_{3y} = \frac{eB_0 d}{m} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \approx 67.40 \text{ км/с}. \tag{8.41}$$

Учитывая теперь что $v_{3y} = v_3 \sin\theta$, угол θ равен

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v_{3y}}{v_3}\right) \approx 63.7^\circ. \tag{8.42}$$

Если вам интересно, то вы можете поиграться в Десмосе с траекторией заряда для случая когда он движется в поле E_0 и B_0 во всем пространстве:
https://www.desmos.com/calculator/hfsdbtik7a?lang=ru
Куда направлена дрейфовая скорость электрона?

Содержание	**Баллы**
$\beta = 23.6^\circ$	2
$v_1 = 93.2$ км/с	1
$\varphi = 27.9^\circ$	1
$v_2 = 150$ км/с	1
$\theta = 63.7^\circ$	3
$v_3 = 75.2$ км/с	2

Задача 9: КвЕКИКВБОнд *(Роман Черемнов)*

Альтернативное название задачи 3... 2... 1... Calculate!

1.

$$v = 13.07 \text{ км/с} = 13.07 \frac{\frac{1000}{1.81} \text{ ЕК}}{\frac{1}{0.3} \text{ Кв}} \approx 2166 \ \text{ ЕК/Кв} \tag{9.1}$$

2.

$$1 \text{ Вова} = \frac{1 \text{ ИК} \cdot 1 \text{ ЕК}}{1 \text{ Кв}^2} = \frac{0.114 \cdot 1.81}{(0.3)^2} \text{ Н} = 2.29 \ \text{ Н} \tag{9.2}$$

3.

$$pV = \nu RT \tag{9.3}$$

$$\nu = \frac{pV}{RT} \tag{9.4}$$

$$\nu = \frac{10^5 \cdot 1.81^3}{8.31 \cdot 273} = 261.4 \ \text{ моль} \tag{9.5}$$

$$1 \ \text{ бабочка} = \frac{0.523}{3} \text{ моль} = 87.1 \ \text{ моль} \tag{9.6}$$

4. Обозначим количество Амперов в одном Ондаатже на x

$$\varepsilon_0 = \mu_0 \tag{9.7}$$

$$8.85{\cdot}10^{-12}\ \text{А}^2\text{с}^4\text{кг}^{-1}\text{м}^{-3} = 8.85{\cdot}10^{-12}\frac{\text{Онд}^2}{x^2}\frac{\text{Кв}^4}{0.3^4}\frac{0.114}{\text{ИК}}\frac{1.81^3}{\text{ЕК}^3} = \frac{7.386\cdot 10^{-10}}{x^2}\frac{\text{Онд}^2\ \text{Кв}^4}{\text{ИК ЕК}^3} \tag{9.8}$$

$$4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{кг м с}^{-1}\ \text{А}^{-2} = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{x^2}{\text{Онд}^2}\frac{0.3}{\text{Кв}}\frac{\text{ИК}}{0.114}\frac{\text{ЕК}}{1.81} = 1.827\cdot 10^{-6}x^2\frac{\text{ИК ЕК}}{\text{Онд}^2\ \text{Кв}} \tag{9.9}$$

$$1.827\cdot 10^{-6}x^2 = \frac{7.386\cdot 10^{-10}}{x^2} \tag{9.10}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{7.386\cdot 10^{-10}}{1.827\cdot 10^{-6}}} = 0.142 \tag{9.11}$$

Содержание	**Баллы**
$v_{\text{ Юпитер}} = 2166\ \ \text{ЕК/Кв}$	1
1 Вова = 2.29 Н	2
1 бабочка = 87.1 моль или 1 бабочка = 88.23 моль	2
$x = 0.142$	5

Задача 10**: F-1** *(Бекасыл Елубай)*

1. Для того, чтобы пройти участок за минимальное время болиду надо двигаться как можно больше на максимальной скорости. Следовательно, движение можно разбить на два участка: движение на максимальной скорости и торможение, которое заканчивается при заходе на поворот. Первый участок движение на постоянной скорости, а второй при постоянном ускорении, так как болид должен затормозить за минимальное время. Найдем время каждого из них и сложим найденные значения.

Скажем расстояние пройденное за на максимальной скорости x. Тогда общее время определится следующим образом:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{x}{v_l} + \frac{v_l - v_t}{3g} \tag{10.1}$$

Длина участка является суммой x и расстояния, пройденного при торможении:

$$d = x + \frac{v_l^2 - v_t^2}{6g} \tag{10.2}$$

В итоге, получаем два уравнения в двумя неизвестными. Находим x из предыдущего уравнения и подставляем это в уравнение с временем:

$$t = \frac{v_l - v_t}{3g} + \frac{1}{v_l}\left(l - \frac{v_l^2 - v_t^2}{6g}\right) \approx 4.142 \text{ с} \tag{10.3}$$

2. Вертикально вниз на тело действуют сила тяжести и прижимная сила, которые компенсируются силой реакции опоры. Запишем второй закон Ньютона на горизонтальную плоскость:

$$(M+m)a = (M+m)\frac{v_{min}^2}{r} = \mu N = \mu((M+m)g + kv_{min}^2) \tag{10.4}$$

Из данного же уравнения просто находим выражение для μ:

$$\mu_{cr} = \frac{1}{r\left(\frac{g}{v_{min}^2} + \frac{k}{M+m}\right)} \approx 1.1 \tag{10.5}$$

3. Для решение задачи надо просто решить дифференциальное уравнение, данное в условии. Пределами интегрирования будут начало и конец движения.

$$\int_{\mu_0}^{\mu_{cr}} \frac{d\mu}{\mu - \mu_{min}} = ln\frac{\mu_{cr} - \mu_{min}}{\mu_0 - \mu_{min}} = -\int_0^l \frac{dl}{\lambda} = -\frac{l}{\lambda} \tag{10.6}$$

Количество пройденных кругов выражается через пройденное расстоние следующим образом: $n = l/l_0$. Вставляем это выражение в предыдущее уравнение.

$$n = \frac{\lambda}{l_0} ln\frac{\mu_{cr} - \mu_{min}}{\mu_0 - \mu_{min}} \approx 2.53 \tag{10.7}$$

Для ответа берем только целую часть, так как у нас спрашивают количество полных кругов. Ответ 2.

Содержание	**Баллы**
$t = 4.142$ с	4
$\mu = 1.1$	3
$n = 2$	3

Решения задач Младшей лиги

Задача 1: Машинка в ловушке *(Амирбек Азатбеков)*

Сначала переведём значение скорости v в СИ:

$$v = 18 \text{ км/ч} = 18 \cdot \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 5 \text{ м/с}$$

Кинетическая энергия машины находится по формуле

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{0.5 \text{ кг} \cdot (5 \text{ м/с})^2}{2} = 6.25 \text{ Дж}$$

Для нахождения механической работы A, совершённую над системой *«машинка-батарейки»*, сперва распишем все внешние силы, действующие на неё:

- Сила притяжения земли $m\vec{g}$
- Сила нормальной реакции $\vec{N}$
- Сила трения покоя $\vec{f}$

Первые две силы направлены перпендикулярно движению, поэтому они не вносят вклад в работу над системой. Следовательно, вся работа производится за счет силы трения покоя

$$A = \vec{f} \cdot \vec{s}$$

где $\vec{s}$ — это перемещение точки приложения силы трения. Однако эта сила приложена к колесам, которые не скользят по поверхности, и поэтому точки приложения силы мгновенно неподвижны относительно земли. Это означает, что $\vec{s} = 0$, и

$$A = 0$$

Раз кинетическая энергия не появилась за счет внешней работы, может возникнуть вопрос, как такой результат совместим с законом сохранения энергии. Сейчас мы в этом разберемся. Полная энергия системы *«машинка-батарейки»* включает следующие составляющие:

- Кинетическая энергия E_K
- Потенциальная энергия U
- Химическая энергия (энергия батареек) E_X
- Тепловая энергия E_T

Движение горизонтально, поэтому $\Delta U = 0$. Так как КПД равен 100%, потерь на нагрев нет, и $\Delta E_T = 0$. Вначале машинка покоялась, поэтому изменение кинетической энергии равно

$$\Delta E_K = E_K - 0 = 6.25 \text{ Дж}$$

Вся кинетическая энергия появилась за счет расхода химической энергии батареек (т.к. КПД 100%). Это означает, что химическая энергия уменьшилась на эту же величину.

$$\Delta E_X = -\Delta E_K = -6.25 \text{ Дж}$$

Следовательно, изменение полной энергии системы равно

$$\Delta E = \Delta E_K + \Delta U + \Delta E_T + \Delta E_X = 6.25 \text{ Дж} + (-6.25 \text{ Дж}) = 0 \text{ Дж}$$

Этот результат совместим с законом сохранения энергии

$$\Delta E = A = 0$$

Содержание	**Баллы**
$E_K = 6.25$ Дж	2
$A = 0$ Дж	4
$\Delta E = 0$ Дж	4

Задача 2: Расслабьтесь и отдохните *(Амирбек Азатбеков)*

P Из закона сохранения энергии следует, что вся механическая энергия шара перейдет в теплоту. Эта энергия равна потенциальной энергии шара над калориметром

$$W = Mgh = 1 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 34 \text{ м} = 340 \text{ Дж}$$

Так как калориметр идеально изолирован, вся выделившаяся теплота расходуется на плавление льда. Поэтому

$$m_1 = \frac{W}{\lambda} = \frac{340 \text{ Дж}}{340\,000 \text{ Дж/кг}} = 0.001 \text{ кг}$$

При охлаждении шара от 100°C до 0°C дополнительно выделится теплота

$$Q_o = Mc\Delta T = 1 \text{ кг} \cdot 130 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1} \cdot (100°\text{C} - 0°\text{C}) = 13\,000 \text{ Дж}$$

Общая теплота, доступная для плавления

$$Q_t = Q_o + W = 13\,340 \text{ Дж}$$

Тогда масса растаявшего льда

$$m_2 = \frac{Q_t}{\lambda} = \frac{13\,340 \text{ Дж}}{340\,000 \text{ Дж/кг}} \approx 0.0392 \text{ кг}$$

Содержание	**Баллы**
$W = 340$ Дж	3
$m_1 = 0.001$ кг	3
$m_2 \approx 0.00392$ кг	4

Задача 3: КвЕКИКВБ *(Роман Черемнов)*

Альтернативное название задачи 3... 2... 1... Calculate!

1.

$$v = 13.07 \text{ км/с} = 13.07 \frac{\frac{1000}{1.81} \text{ ЕК}}{\frac{1}{0.3} \text{ Кв}} \approx 2166 \text{ ЕК/Кв} \tag{3.1}$$

2.

$$1 \text{ Вова} = \frac{1 \text{ ИК} \cdot 1 \text{ ЕК}}{1 \text{ Кв}^2} = \frac{0.114 \cdot 1.81}{(0.3)^2} \text{ Н} = 2.29 \text{ Н} \tag{3.2}$$

3.

$$pV = \nu RT \tag{3.3}$$

$$\nu = \frac{pV}{RT} \tag{3.4}$$

$$\nu = \frac{10^5 \cdot 1.81^3}{8.31 \cdot 273} = 261.4 \text{ моль} \tag{3.5}$$

$$1 \text{ бабочка} = \frac{0.523}{3} \text{ моль} = 87.1 \text{ моль} \tag{3.6}$$

Содержание	**Баллы**
$v_{\text{Юпитер}} = 2166.2983$ ЕК/Кв	3
1 Вова $= 2.29267$ Н	3
1 бабочка $= 87.1$ моль или 1 бабочка $= 88.23$ моль	4

Задача 4: Подсолнечное масло *(Бекасыл Елубай)*

1. После того, как масло достигнет конца трубы, внутренняя часть трубы будет состоять только из масло высотой h_{oil}. Уровень воды снаружи является суммой изначльной воды и воды, которая перешла из внутренней части: $h_w = h_0 + \Delta h$. Теперь найдем Δh:

$$\Delta h = \frac{V_0}{S} = \frac{h_0 \pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)} \tag{4.1}$$

Давление на нулевом уровне(здесь и далее нулевой уровень - уровень конца трубы) от масла и воды должны быть одинаковыми.

$$P_w = P_{oil} = \rho_{oil} g h_{oil} = \rho_w g h_w = \rho_w g h_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}\right) \tag{4.2}$$

Отсюда находим ответ:

$$h_{oil} = h_0 \frac{\rho_w R^2}{\rho_{oil}(R^2 - r^2)} = 10 \text{ см} \tag{4.3}$$

2. Для нахождения толщины масла разддеим обьем налитого масла на плозадь цилиндра:

$$h'_{oil} = \frac{\pi r^2 h_{oil}}{\pi R^2} = h_0 \frac{\rho_w r^2}{\rho_{oil}(R^2 - r^2)} = 2.5 \text{ см} \tag{4.4}$$

3. Для решения задачи сперва найдем нужный диапозон, а после проверим заходит ли в этот диапозон радиус трубы.
Рассмотрим момент когда уже все масло внутри трубы сгорело. Вне зависимости от конфигурации мысленно переведем систему в следующее положение: конец масла находится на нулевом уровне, а внутри трубы находится только вода. Сравним давление на нулевом уровне от масла и воды. Если давление от масла будет больше от давления воды, при стационарном режиме масло опуститься ниже и перетечет внутрь трубы. Следовтельно, нам необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\rho_{oil} g h'_{oil} > \rho_w g h'_w \tag{4.5}$$

Вся вода выше нулевого уровня находится внутри трубы, следовательно уровень воды будет:

$$h'_w = h_0 \frac{R^2}{r^2} \tag{4.6}$$

Подставляя данный результат в уравнени() получаем следующее квадратное неравенство:

$$r^4 + R^2r^2 - R^4 > 0 \tag{4.7}$$

Нулями данного уравненого являются $r_0^2 = R^2(-1 \pm \sqrt{5})/2$. С учетом $r^2 > 0$, неравенство будет выполняться при $r > R\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Также по физическим соображениям радиус трубы не может быть больше радиуса цилиндра, что определяет верхний предел. С учетом этих неравенств приходим к окончательному ответу:

$$r \in R\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}; 1\right) \approx (7.86; 10) \text{ см} \tag{4.8}$$

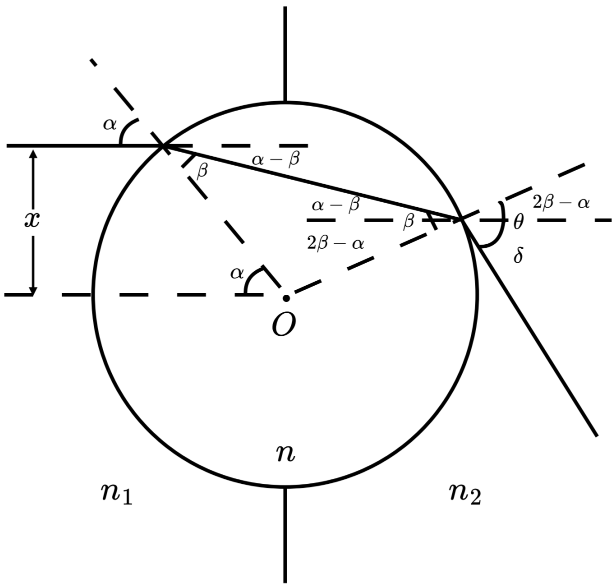
Отсюда, сразу видно для заданного радиуса трубы опиисанный процесс невозможен.

Содержание	**Баллы**
$h_{oil} = 10$ см	2.5
$h'_{oil} = 2.5$ см	1
Перетекание невозможно, 0	0.5
$r_{min} = 7.86$ см	5
$r_{max} = 10$ см	1

Задача 5: Геомка *(Амир Пшенбаев)*

1. Распишем все углы для пучка проходящего через сферу. Обозначим α - угол падения луча перпендикулярно поверхности сферы, а угол β - угол преломления луча в сфере n. Второе преломление между средами n и n_2 происходит также под углом β, так как в рассматриваемом треугольнике, стороны напротив друг другу равны R (см рисунок). Из закона Снеллиуса для первого преломления

$$n_1 \sin\alpha = n \sin\beta. \tag{5.1}$$



А для второго преломления выполняется

$$n \sin\beta = n_2 \sin\theta = n_1 \sin\alpha. \tag{5.2}$$

Для того что бы происходило внутренние отражение между средами n и n_2 должно выполняться что $\sin\theta > 1$, то есть

$$\sin\theta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha > 1. \tag{5.3}$$

Из геометрии также очевидно что $\sin\alpha = x/R$. Поэтому

$$\frac{n_1 x}{n_2 R} > 1 \Rightarrow x > \frac{n_2}{n_1}R = x_c. \tag{5.4}$$

Откуда получаем что

$$x_c = \frac{n_2}{n_1}R \approx 0.75 \text{ м}. \tag{5.5}$$

2. Как видно из геометрии показанной на рисунке выше, угол отклонение от начальной траектории δ находится как

$$\delta = \theta - (2\beta - \alpha) = \theta + \alpha - 2\beta. \tag{5.6}$$

Выражая θ и β через α, находим что

$$\sin\theta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right),$$

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n}\sin\alpha \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\sin\alpha\right),$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right) + \alpha - 2\arcsin\left(\frac{n_1}{n}\sin\alpha\right). \tag{5.7}$$

Из этого уравнения видно что при увеличение α, также увеличивается δ. Максимальное отклонение δ можно найти из условия того что аргумент арксинуса не может быть больше 1, или другими словами, $\theta = 90^\circ$. Тогда получаем что

$$1 = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{5.8}$$

Подставляя α в уравнение для δ, окончательно получаем

$$\delta = 90 + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) - 2\arcsin\left(\frac{n_2}{n}\right) \approx 55.1^\circ. \tag{5.9}$$

Содержание	**Баллы**
$x_c = 0.75$ м	4
$\delta = 55.1^\circ$	6

Задача 6: Дженга *(Амирбек Азатбеков)*

Для достижения максимального горизонтального выступа, необходимо, чтобы прямо над правым концом каждого кирпича находился центр масс всех кирпичей выше.

Будем отсчитывать кирпичи сверху вниз (т.е. самый верхний кирпич — первый), а так же будем использовать другую систему отсчета, где начальная координата ($x' = 0$) находится в правом краю кирпича 1.

Так как кирпич однороден, его центр масс находится на расстоянии $L/2$ от его правого края. Центр масс кирпича 1 находится в $x' = -L/2$. Это и есть правый конец кирпича 2, а потому центр масс кирпича 2 находится в $x' = -L/2 - L/2$. Следовательно, их общий центр масс в

$$x' = \frac{(-L/2) + (-L/2 - L/2)}{2} = -L/2 - L/4$$

Это есть расположение правого конца кирпича 3. Поэтому центр масс кирпича 3 расположен в $x' = -L/2 - L/4 - L/2$, а общий центр масс трех кирпичей в

$$x' = \frac{(-L/2) + (-L/2 - L/2) + (-L/2 - L/4 - L/2)}{3} = -L/2 - L/4 - L/6$$

Это так же является расположением правого конца кирпича 4. То есть, правый конец кирпича 1 находится на расстоянии $(L/2)(1 + 1/2 + 1/3)$ от правого конца кирпича 4.

Этот принцип применяется и дальше. Для стопки из n кирпичей правый конец кирпича 1 будет находиться на расстоянии

$$s_n = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right)$$

от правого конца кирпича n.

Подставляя $n = 10$ и добавляя расстояние от правого конца последнего кирпича до его левого конца L, получим

$$D = s_{10} + L \approx 2.414L \approx 0.604 \text{ м}$$

Центр масс самого нижнего кирпича находится на $x = L/2$. Так как при максимальном горизонтальном выступе D центр масс верхних 9 кирпичей находятся над правым краем нижнего кирпича, их общий центр масс находится на $x = L$. Из этого следует, что координата центра масс системы

$$x_{CM} = \frac{L/2 + 9 * L}{10} = 0.95L = 0.2375 \text{ м}$$

Содержание	Баллы
$D \approx 0.604$ м	7
$x_{CM} = 0.2375$ м	3

Задача 7: Упруго или неупруго? *(Амир Пшенбаев)*

1. Используя ЗСЭ, можно найти что в наинизшей точке перед ударом скорости шаров равны

$$v_0 = \sqrt{2gh} \approx 1.98 \text{ м/с}. \tag{7.1}$$

Расписывая ЗСИ по направлению движения m_2,

$$m_2v_0 - m_1v_0 = m_2v_2 + m_1v_1, \tag{7.2}$$

где v_1, v_2 - скорости шаров после удара по направлению начального движения m_2. А из ЗСЭ можно получить что

$$\frac{m_2v_0^2}{2} + \frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_1v_1^2}{2}. \tag{7.3}$$

С учетом что $v_0^2 - v_2^2 = (v_0 - v_2)(v_0 + v_2)$ и $v_1^2 - v_0^2 = (v_1 - v_0)(v_1 + v_0)$, перепишем теперь уравнение (7.3) в виде

$$m_2(v_0^2 - v_2^2) = m_1(v_1^2 - v_0^2),$$

$$m_2(v_0 - v_2)(v_0 + v_2) = m_1(v_1 - v_0)(v_1 + v_0). \tag{7.4}$$

А уравнение (7.2) в виде

$$m_2(v_0 - v_2) = m_1(v_1 + v_0). \tag{7.5}$$

То есть, подставив (7.5) в (7.4), получим

$$v_0 + v_2 = v_1 - v_0. \tag{7.6}$$

Выразим теперь v_2 из (7.6) и подставим его в (7.5).

$$v_2 = v_1 - 2v_0 \Rightarrow m_2(v_0 - (v_1 - 2v_0)) = m_1(v_1 + v_0),$$

$$v_1(m_1+m_2) = 3m_2v_0 - m_1v_0.$$

Тогда с учетом (7.1), получаем ответ для v_1:

$$v_1 = \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1+m_2}\right)\sqrt{2gh} \approx 3.96 \text{ м/с}. \tag{7.7}$$

Теперь подставив (7.7) в уравнение для v_2, найдем что

$$v_2 = \left(\frac{m_2 - 3m_1}{m_1+m_2}\right)\sqrt{2gh} = 0 \text{ м/с}. \tag{7.8}$$

2. Из ЗСЭ запишем для m_1:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1+m_2}\right)^2 h = 0.8 \text{ м}. \tag{7.9}$$

Так как $v_2 = 0$, то очевидно что высота на которую поднимется m_2 равно нулю. Значит,

$$h_2 = 0 \text{ м} \tag{7.10}$$

3. Найдем теперь максимально возможную высоту подъема h_2. Из уравнения (7.9) видно что чем больше m_2, тем больше высота подъема. Поэтому, для максимального h_{2m} нужно чтобы выполнялось

$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1. \tag{7.11}$$

Тогда, для этого случая можно пренебречь m_1 в уравнение (7.9). Поэтому,

$$h_{\max} = 9h = 1.8 \text{ м} \tag{7.12}$$

Но так как шары подвешены на потолке нитями длины l, максимальная высота подъема шара не может превышать 1 метра. Поэтому,

$$h_{\max} = 1 \text{ м} \tag{7.13}$$

4. Рассмотрим теперь случай для абсолютно неупрого соударения. Также расписывая ЗСИ по направлению движения m_2,

$$m_2v_0 - m_1v_0 = (m_1+m_2)v, \tag{7.14}$$

где v - общая скорость шаров. Значит,

$$v = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}\right)v_0 = \frac{v_0}{5} \approx 0.396 \text{ м/с} \tag{7.15}$$

5. Используя ЗСЭ, найдем что высота подъема

$$H = \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h = \frac{h}{25} = 0.008 \text{ м} \tag{7.16}$$

6. Аналогично пункту 3, из уравнения (7.16) видно что чем больше m_2, тем больше высота подъема. Поэтому, для максимального h_{2m} нужно чтобы также выполнялось

$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1. \tag{7.17}$$

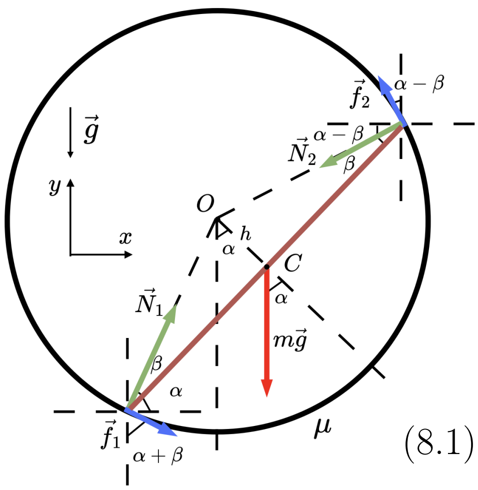
Поэтому,

$$H_{\max} = h = 0.2 \text{ м}. \tag{7.18}$$

Содержание	Баллы
$v_1 \approx 3.96$ м/с	1
$v_2 = 0$ м/с	1
$h_1 = 0.8$ м	1
$h_2 = 0$ м	1
$h_{\max} = 1$ м	2
$v \approx 0.396$ м/с	1
$H = 0.008$ м	1
$H_{\max} = 0.2$ м	2

Задача 8: Равновесие стержня *(Амир Пшенбаев)*

Обозначим β - углом между стержнем и радиусом в точках опорах. Тогда, распишем углы как показано на рисунке. Обозначим также N_1, f_1 - силой реакции опоры и силой трением нижнего конца стержня. Аналогично для верхнего конца стержня N_2, f_2. Для максимального отклонения α мы рассматриваем момент когда стержень только начинает скользить. Значит, для данного случая должно выполняться что



$$f_1 = \mu N_1, \tag{8.1}$$

$$f_2 = \mu N_2. \tag{8.2}$$

Распишем теперь силы действующие на стержень. По горизонтали

$$N_1 \cos(\alpha + \beta) + f_1 \sin(\alpha + \beta) = N_2 \cos(\alpha - \beta) + f_2 \sin(\alpha - \beta). \tag{8.3}$$

А по вертикали

$$N_1 \sin(\alpha+\beta) - f_1 \cos(\alpha+\beta) + f_2 \cos(\alpha-\beta) - N_2 \sin(\alpha-\beta) = mg \qquad (8.4)$$

Подставим (8.1) и (8.2) в (8.3) и найдем связь между N_1 и N_2.

$$N_1(\cos(\alpha+\beta) + \mu \sin(\alpha+\beta)) = N_2(\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta))$$

Выражая N_2 через N_1,

$$N_2 = N_1 \left(\frac{\cos(\alpha+\beta) + \mu \sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)} \right). \qquad (8.5)$$

Подставляя это в (8.4) с учетом (8.1), (8.2), получаем что

$$N_1(\sin(\alpha+\beta) - \mu \cos(\alpha+\beta)) + N_2(\mu \cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)) = mg$$

$$\begin{aligned} &N_1 \left((\sin(\alpha+\beta) - \mu \cos(\alpha+\beta)) + \right. \\ &+ (\mu \cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta) \left(\frac{\cos(\alpha+\beta) + \mu \sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)} \right) = mg. \end{aligned}$$

Значит, соотношение между N_1 и mg равно

$$\begin{aligned} N_1(&(\sin(\alpha+\beta) - \mu \cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)) + \\ &+ (\mu \cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta))(\cos(\alpha+\beta) + \mu \sin(\alpha+\beta))) = \\ &= mg(\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)). \end{aligned}$$

Хорошо, раскроем теперь скобки!

$$\begin{aligned} N_1(&\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)) - \\ &- \mu \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)) + \\ &+ \mu \cos(\alpha-\beta)(\cos(\alpha+\beta) + \mu \sin(\alpha+\beta)) - \\ &- \sin(\alpha-\beta)(\cos(\alpha+\beta) + \mu \sin(\alpha+\beta))) = \\ &= mg(\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)). \end{aligned}$$

Как мы видем, слагаемые $\mu \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)$ сокращают друг-друга. Слагаемые $\mu \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)$ также сокращают друг-друга. Тогда, учитывая это, можно упростить уравнение как

$$\begin{aligned} N_1(&\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \mu^2 \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \\ &+ \mu^2 \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)) = \\ &= mg(\cos(\alpha-\beta) + \mu \sin(\alpha-\beta)). \end{aligned}$$

То есть,

$$\begin{aligned}&N_1(\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\\&+\mu^2(\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)))=\\&=mg(\cos(\alpha-\beta)+\mu\sin(\alpha-\beta)).\end{aligned}$$

Взяв $(\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta))$ за скобку,

$$\begin{aligned}&N_1(\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta))(1+\mu^2)=\\&=mg(\cos(\alpha-\beta)+\mu\sin(\alpha-\beta)).\end{aligned}$$

Отлично, получилось довольно упрощенное уравнение. Упростим его еще больше раскрыв множитель $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$:

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\\&(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)-\\&-(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\\&=2\sin\beta\cos\beta=\sin 2\beta\end{aligned}$$

Класс! Теперь получилось сокращенное уравнение, не зависящее от α. Тогда, уравнение принимает вид

$$N_1\sin 2\beta(1+\mu^2)=mg(\cos(\alpha-\beta)+\mu\sin(\alpha-\beta)).$$

Выразим наконец N_1 и N_2 через mg:

$$N_1=\frac{mg}{(1+\mu^2)\sin 2\beta}(\cos(\alpha-\beta)+\mu\sin(\alpha-\beta)), \tag{8.6}$$

$$N_2=\frac{mg}{(1+\mu^2)\sin 2\beta}(\cos(\alpha+\beta)+\mu\sin(\alpha+\beta)). \tag{8.7}$$

Запишем теперь момент сил относительно точки O. Очевидно, что

$$mgh\sin\alpha=(f_1+f_2)R=\mu(N_1+N_2)R. \tag{8.8}$$

Подставляя теперь (8.6) и (8.7) в уравнение (8.8), получаем что

$$h\sin\alpha=\frac{\mu R}{(1+\mu^2)\sin 2\beta}(\cos(\alpha-\beta)+\mu\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)+\mu\sin(\alpha+\beta)).$$

Раскрыв аргументы для косинуса и синуса, или используя формулу для суммы косинусов и синусов, получаем

$$h\sin\alpha=\frac{2\mu R\cos\beta}{(1+\mu^2)\sin 2\beta}(\cos\alpha+\mu\sin\alpha).$$

Или снова подставив что $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ и поделив все на $\sin\alpha$,

$$h = \frac{\mu R}{(1+\mu^2)\sin\beta}(\cot\alpha + \mu). \tag{8.9}$$

Теперь свяжем β с размерами стержня и радиуса сферы. Из рисунка видно что

$$\sin\beta = \frac{h}{R}. \tag{8.10}$$

Также понятно что

$$h^2 + \frac{l^2}{4} = R^2 \Rightarrow h^2 = R^2 - \frac{l^2}{4}. \tag{8.11}$$

Подставляя (8.10), (8.11) в (8.9),

$$R^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{\mu R^2}{(1+\mu^2)}(\cot\alpha + \mu),$$

$$\cot\alpha + \mu = \frac{(1+\mu^2)}{\mu}\left(1 - \frac{l^2}{4R^2}\right).$$

Тогда, окончательно,

$$\cot\alpha = \frac{1}{\mu} - \frac{(1+\mu^2)}{\mu}\left(1 - \frac{l^2}{4R^2}\right) \approx 1.744. \tag{8.12}$$

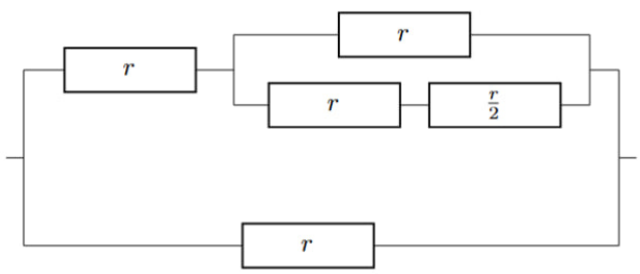
Откуда для численного ответа α получаем $\alpha \approx 29.8°$.

Содержание	**Баллы**
$\alpha \approx 29.8°$	10

Задача 9: R_n-язанская башня *(Владимир Литвинов)*

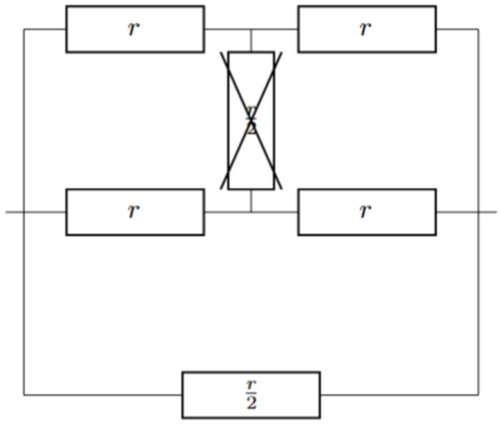
1. Клеммы A_1 и B_2 подключены к одной точке - углу 1. Другими словами они закорочены и сопротивление между ними $R_2 = 0$ Ом

2. Теперь нужно найти сопротивление между A_1 и B_3. Цепь из условия можно перерисовать так, как показано на рисунке. Сопротивление этой цепи можно определить используя формулы для параллельного и последовательного соединения.



$$R_3 = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+\frac{r}{2}}\right)^{-1}}\right)^{-1} = \frac{8}{13}r \approx 0.616 \ \text{Ом} \tag{9.1}$$

3. Цепь в пункте 3 можно перерисовать так. Для того, чтобы найти сопротивление между клеммами A_1 и B_4, можно заметить, что все резисторы, за исключением резистора $\frac{r}{2}$, который напрямую соединяет A_1 и B_4, образуют сбалансированный мостик $(r \cdot r = r \cdot r)$, а значит ток по мосту не течёт и элементы цепи образуют схему показанную на рисунке.



$$R_3 = \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r+r} + \frac{1}{r+r}\right)^{-1} = \frac{r}{3} \approx 0.33 \text{ Ом} \tag{9.2}$$

4. m и k - натуральные числа, такие что $n = 4m + k,\ k < 4$, m - количество полных наложений, k - остаток.
Если $k = 0$
m полных наложений идентичны пункту 3, где сопротивление каждого резистора уменьшено в $m + 1$ раз. Тогда

$$R_{k=1} = \frac{r}{3(m+1)} = \frac{r}{3(n+1)} \tag{9.3}$$

Если $k = 2$
Контакты вновь закорочены, значит сопротивление равно 0

$$R_{k=2} = 0 \tag{9.4}$$

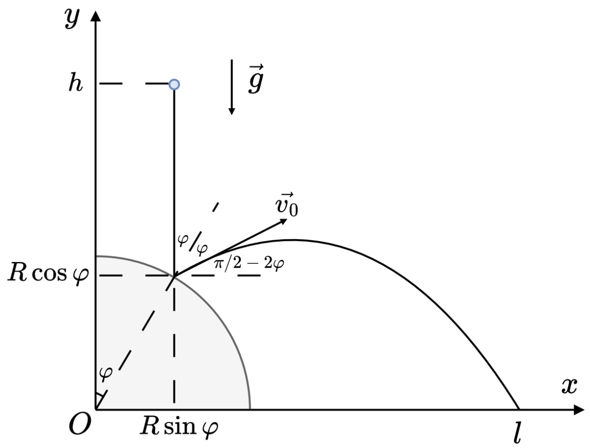
Предлагаем читателям самостоятельно попробовать решить задачу для случаев $k = 1$ и $k = 3$. Решения принимаются на телеграм @vladimir_07_litvinov вплоть до начала финального этапа APhB 2025.

Содержание	**Баллы**
$R_2 = 0$ Ом	1
$R_3 \approx 0.616$ Ом	2
$R_4 \approx 0.33$ Ом	2
Формула для каждого из случаев	5

Задача 10: Эффективная траектория *(Амир Пшенбаев)*

1. Из ЗСЭ можно найти что перед соударением с полусферой скорость мячика равна

$$v_0 = \sqrt{2g(h - R\cos\varphi)} \tag{10.1}$$



После соударением с полусферой, мячик отскочит под тем же углом φ к нормали. Значит, угол с горизонталью после соударения равен $\pi/2 - 2\varphi$. Запишем теперь уравнение кинематики по вертикальной компоненте:

$$-R\cos\varphi = v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) t - \frac{gt^2}{2},$$

$$-R\cos\varphi = v_0 \cos 2\varphi t - \frac{gt^2}{2}, \tag{10.2}$$

где t - общее время движение шара. По горизонтали очевидно что

$$v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) t = l - R\sin\varphi,$$

$$v_0 \sin 2\varphi t = l - R\sin\varphi. \tag{10.3}$$

Выразим теперь t из (10.3) и подставим его в (10.2)

$$t = \frac{l - R\sin\varphi}{v_0 \sin 2\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R\cos\varphi = \cot 2\varphi(l - R\sin\varphi) - \frac{g\,(l - R\sin\varphi)^2}{2v_0^2 \sin^2 2\varphi}. \tag{10.4}$$

Раскроем теперь скобки и приведем к квадратному уравнению относительно l^2:

$$-R\cos\varphi - l\cot 2\varphi + R\cot 2\varphi \sin\varphi + \frac{g}{2v_0^2 \sin^2 2\varphi}(l^2 - 2lR\sin\varphi + R^2\sin^2\varphi) = 0$$

$$\frac{g}{2v_0^2\sin^2 2\varphi} l^2 - \left(\cot 2\varphi + \frac{gR\sin\varphi}{v_0^2 \sin^2 2\varphi}\right) l - R\cos\varphi + R\cot 2\varphi \sin\varphi + \frac{gR^2\sin^2\varphi}{2v_0^2\sin^2 2\varphi} = 0$$

Перепишем $R\cos\varphi - R\cot 2\varphi \sin\varphi$ с учетом тригонометрических формул $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ и $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$:

$$\begin{aligned}
&R\cos\varphi - R\cot 2\varphi\sin\varphi = \frac{R}{\sin 2\varphi}(\cos\varphi\sin 2\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi) = \\
&= \frac{R}{\sin 2\varphi}(2\sin\varphi\cos^2\varphi - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sin\varphi) = \\
&= \frac{R}{\sin 2\varphi}(\sin\varphi\cos^2\varphi + \sin^3\varphi) = \frac{R\sin\varphi}{\sin 2\varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \\
&= \frac{R\sin\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{R}{2\cos\varphi}
\end{aligned}$$

А слагаемое $gR^2\sin^2\varphi/2v_0^2\sin^2 2\varphi$ можно упростить как

$$\frac{gR^2\sin^2\varphi}{2v_0^2\sin^2 2\varphi} = \frac{gR^2}{8v_0^2\cos^2\varphi}$$

Тогда упрощенное уравнение относительно l^2 записывается как

$$\frac{g}{2v_0^2\sin^2 2\varphi}l^2 - \left(\cot 2\varphi + \frac{gR\sin\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi}\right)l - \left(\frac{R}{2\cos\varphi} - \frac{gR^2}{8v_0^2\cos^2\varphi}\right) = 0 \qquad (10.5)$$

Тогда использую формулу для квадратного уравнения, получаем что

$$\begin{aligned}
l = \frac{v_0^2\sin^2 2\varphi}{g}\Bigg(&\cot 2\varphi + \frac{gR\sin\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi} \pm \\
&\pm\sqrt{\left(\cot 2\varphi + \frac{gR\sin\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi}\right)^2 + \left(\frac{gR}{v_0^2\sin^2 2\varphi\cos\varphi} - \frac{g^2R^2}{4v_0^4\sin^2 2\varphi\cos^2\varphi}\right)}
\end{aligned}$$

Упростим теперь слагаемые внутри корня с подстановкой тригонометрических формул:

$$\begin{aligned}
&\left(\cot 2\varphi + \frac{gR\sin\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi}\right)^2 + \left(\frac{gR}{v_0^2\sin^2 2\varphi\cos\varphi} - \frac{g^2R^2}{4v_0^4\sin^2 2\varphi\cos^2\varphi}\right) = \\
&= \cot^2 2\varphi + \frac{2gR\sin\varphi\cot 2\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi} + \frac{g^2R^2\sin^2\varphi}{v_0^4\sin^4 2\varphi} + \frac{gR}{v_0^2\sin^2 2\varphi\cos\varphi} - \frac{g^2R^2}{4v_0^4\sin^2 2\varphi\cos^2\varphi} = \\
&= \cot^2 2\varphi + \frac{2gR\sin\varphi\cos 2\varphi}{v_0^2\sin^3 2\varphi} + \frac{g^2R^2}{4v_0^4\sin^2 2\varphi\cos^2\varphi} + \frac{gR}{v_0^2\sin^2 2\varphi\cos\varphi} - \frac{g^2R^2}{4v_0^4\sin^2 2\varphi\cos^2\varphi} = \\
&= \cot^2 2\varphi + \frac{gR(\cos 2\varphi + 1)}{v_0^2\sin^2 2\varphi\cos\varphi} = \cot^2 2\varphi + \frac{2gR\cos\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi}
\end{aligned}$$

Тогда, уравнение для l принимает вид

$$l = \frac{v_0^2\sin^2 2\varphi}{g}\left(\cot 2\varphi + \frac{gR\sin\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi} \pm \sqrt{\cot^2 2\varphi + \frac{2gR\cos\varphi}{v_0^2\sin^2 2\varphi}}\right) \qquad (10.6)$$

Теперь подставив v_0 из (10.1), получаем что

$$l = 2(h - R\cos\varphi)\sin^2 2\varphi \left(\cot 2\varphi + \frac{R\sin\varphi}{2(h-R\cos\varphi)\sin^2 2\varphi} \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\cot^2 2\varphi + \frac{R\cos\varphi}{(h-R\cos\varphi)\sin^2 2\varphi}}\right).$$

Так как $l > 0$, то нужно выбрать положительный корень. Поэтому,

$$l = 2(h - R\cos\varphi)\sin^2 2\varphi \left(\cot 2\varphi + \frac{R\sin\varphi}{2(h-R\cos\varphi)\sin^2 2\varphi} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\cot^2 2\varphi + \frac{R\cos\varphi}{(h-R\cos\varphi)\sin^2 2\varphi}}\right).$$

Подставим теперь численные значения R и h, получив общую формулу $l(\varphi)$:

$$l = (3-\cos\varphi)\sin^2 2\varphi \left(\cot 2\varphi + \frac{\sin\varphi}{2(3-\cos\varphi)\sin^2 2\varphi} + \sqrt{\cot^2 2\varphi + \frac{\cos\varphi}{(3-\cos\varphi)\sin^2 2\varphi}}\right).$$

Подставив теперь значение угла $\varphi = \varphi_0 = 36°$, получим расстояние l равное

$$l \approx 2.36 \text{ м}. \tag{10.7}$$

Ответы в диапазоне ± 0.01 м также принимаются.

2. Для решение данного пункта воспользуемся табличным методом. Сначала возьмем шагом для $\varphi = 5°$ и рассчитаем l для $\varphi = 31°$ и $\varphi = 41°$.

$\varphi, °$	l, м
31	2.63
36	2.36
41	1.96

Видно, что φ должен быть меньше $36°$, так как для $31°$ градусов получился больший l. Теперь возьмем шаг в условно $3°$ относительно $31°$.

$\varphi, °$	l, м
28	2.72
31	2.63
34	2.49

Ответ ближе к $\varphi = 28°$, поэтому пойдем еще дальше относительно этого градуса, улучшив также точность для l:

$\varphi,^\circ$	l, м
22	2.637
25	2.718
28	2.716

Из этого становится очевидным что максимум лежит где-то в районе 25 градусов, потому-что для 22 градусов l начало уменьшаться. Возьмем теперь шаг в 1 градус относительно 25.

$\varphi,^\circ$	l, м
24	2.700
25	2.718
26	2.726

Значит, ответ ближе к 26. Возьмем теперь шаг в 0.5 градусов относительно 26 градусов.

$\varphi,^\circ$	l, м
25.5	2.723
26	2.726
26.5	2.727

Теперь улучшим точность взяв шаг в 0.1 градусов относительно 26.5 по обе стороны.

$\varphi,^\circ$	l, м
26.3	2.72655
26.4	2.72661
26.5	2.72658
26.6	2.72647
26.7	2.72626

Отсюда видно что для 26.4 расстояние l является наибольшим. Поэтому,

$$\varphi_c \approx 26.4^\circ. \tag{10.8}$$

Ответы в диапазоне $\pm 0.1^\circ$ м также принимаются. А соответсвующее для него максимальное расстояние равно

$$l_\mathrm{m} \approx 2.73 \text{ м}.$$

Содержание	**Баллы**

$l \approx 2.36$ м	6
$\varphi_c \approx 26.4^\circ$	4