

ALMATY PHYSICS BATTLES

ФИНАЛЬНЫЙ ЭТАП

28 НОЯБРЯ - 1 ДЕКАБРЯ 2025

АВТОРЫ ЗАДАЧ: Черемнов Р., Пшенбаев А., Елубай Б., Литвинов В.,
Барлыбаев Н., Ревковский А., Бисенали С., Тюлюбаев Д.,
Кузнецов Е., Курман Д., Дрожжин И., Сұраған Қ.,
Азатбеков А., Пластинин И., Сейткамит А., Казымбек И.
Ускембаев А., Аймуратов А.

ВЁРСТКА: Черемнов Р.

Содержание

	Задачи	Условия	Решения
1.	Первый тур. Старшая лига	3	32
2.	Первый тур. Младшая лига	6	41
3.	Второй тур. Старшая лига	8	49
4.	Второй тур. Младшая лига	10	58
5.	Третий тур. Старшая лига	12	67
6.	Третий тур. Младшая лига	14	72
7.	Четвертый тур. Старшая лига	17	76
8.	Четвертый тур. Младшая лига	21	87
9.	Пятый тур. Старшая лига	25	95
10.	Пятый тур. Младшая лига	28	108

Первый тур. Старшая лига

Задача 1: Морской Бой *(Даниэль Тюлюбаев, Роман Черемнов)*


В течение первой минуты каждый капитан расставляет флот так, чтобы корабли не соприкасались. В течение следующих четырех минут они по очереди называют координаты выстрелов по чужому полю. Если было попадание, следующим ходит тот же капитан, если промах — ход передается. Время на размышление перед ходом не должно превышать 10 секунд. Победитель определяется наибольшим количеством полностью подбитых кораблей. Если их количество одинаково, то наибольшим количеством подбитых палуб (клеток).

	А	Б	В	Г	Д	Е
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Корабли:

 × 1 шт (3 палубы)

 × 2 шт (2 палубы)

 × 2 шт (1 палуба)

Всего: 5 кораблей (8 палуб)

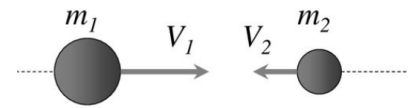
Задача 2: Заряженный маятник *(Егор Кузнецов)*

Невесомый жёсткий стержень одним концом прикреплен к шарниру на потолке, а на другом его конце закреплен груз малых размеров. Период малых колебаний математического маятника оказался равным T_0 . Систему помещают в однородное электростатическое поле, направленное вертикально вверх, и заряжают стержень равномерно по длине таким положительным зарядом, что сила реакции со стороны шарнира оказалась равна нулю. Заряд по стержню не перераспределяется. Каким

будет период малых колебаний груза T_1 , если направление электростатического поля изменить на противоположное

Задача 3: Горячие шары (Курман Дамир)

В одномерном пространстве сталкиваются два шарика с массами m_1 и m_2 и начальными скоростями V_1 и V_2 . Изначальные температуры шариков равны T_1 и T_2 . Теплоёмкости шариков считать постоянными и равными C_1 и C_2 . Система изолирована, то есть нет теплообмена с окружающей средой. Теплопроводность внутри каждого шара очень велика, поэтому температура внутри каждого шара выравнивается мгновенно. Найти изменение энтропии в двух случаях: при абсолютно упругом ударе, и абсолютно неупругом ударе.

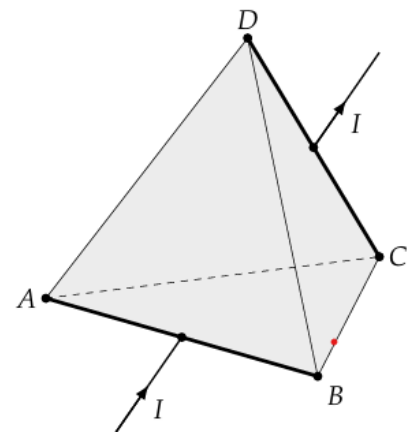


Задача 4: Пробоина (Илья Дрожжин)

Оцените время выкипания 1 кг воды из космического корабля, в котором образовалась пробоина площадью 1 мм^2 . Температура в корабле равна 20° C . Давление насыщенных паров воды при этой температуре равно 234 кПа.

Задача 5: Токи в тетраэдре (Егор Кузнецов)

Правильный тетраэдр сделан из тонких проводящих правильных треугольников со стороной a и толщины δ много меньше размеров рёбер ($\delta \ll a$). Проводимость материала, из которого сделаны треугольники, равна σ . К рёбрам AB и CD вдоль всей их длины припаяли одинаковые проволочки пренебрежимо малого сопротивления. Внутри и снаружи тетраэдра вакуум. К центрам рёбер AB и CD подводят ток I так, что подводящие провода располагаются вдоль одной прямой.



А. (8 баллов) Определите величины и направления векторов напряжённости электростатического поля в центрах граней тетраэдра и индукции магнитного поля в центре тетраэдра.

В. (4 балла) Чему станет равна индукция магнитного поля в центре тетраэдра, если к рёбрам AC , AD , BC и BD вдоль всей их длины припаять проволочки пренебрежимо малого сопротивления такие же, как были изначально припаяны вдоль рёбер AB и CD , и обеспечить хороший контакт между концами проволочек в вершинах тетраэдра?

Задача 6: Цикл кого? (Егор Кузнецов)

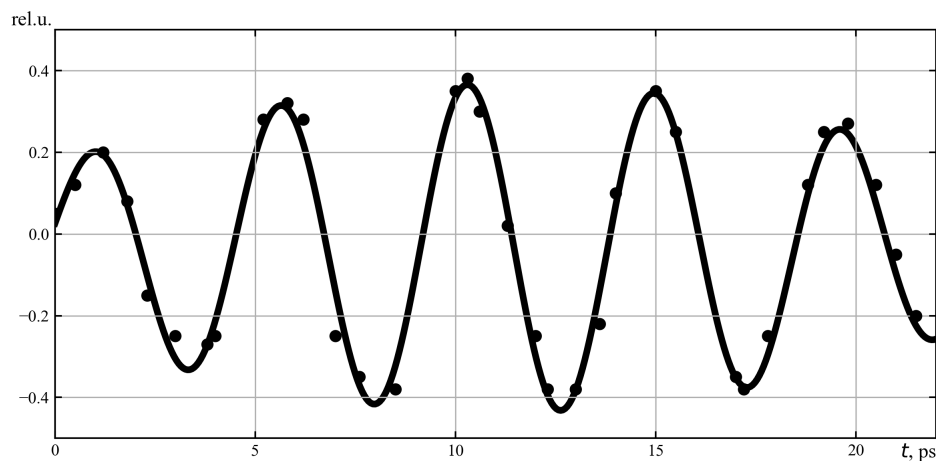
Над ν молями идеального одноатомного газа совершают циклический процесс 1-2-3-4, состоящий из процессов 1-2 и 3-4, протекающих при постоянной молярной теплоёмкости C , и двух изохорических процессов 2-3 и 4-1. Температуры газа в состояниях 1 и 3 равны T_1 и T_3 соответственно. Определите максимальную работу,

которая может быть совершена газом в таком циклическом процессе.

Задача 7: Атом Калия (*Амир Пшенбаев*)

В марте 2008 г. Б. Даннинг с коллегами (Университет Райса, США) получили высоковозбужденные атомы калия, в которых внешний электрон, как точечная частица, вращался вокруг ядра по круговой орбите. На рисунке ниже приведены результаты измерения положения электрона (проекция на ось, лежащую в плоскости орбиты) от времени. По оси y на данном рисунке отложены значения в относительных единицах (rel.u.), а по оси x — время в пикосекундах (ps), где $1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ с}$. Оцените величину главного квантового числа и радиус орбиты электрона.

Примечание: Используйте классическую модель атома Бора, где электрон взаимодействует с ядром по законам классической физики, а момент импульса электрона может принимать только дискретные значения $L_n = n\hbar$, где n — главное квантовое число.



Первый тур. Младшая лига

Задача 8: Морской Бой (Даниэль Тюлюбаев, Роман Черемнов)


В течение первой минуты каждый капитан расставляет флот так, чтобы корабли не соприкасались. В течение следующих четырех минут они по очереди называют координаты выстрелов по чужому полю. Если было попадание, следующим ходит тот же капитан, если промах — ход передается. Время на размышление перед ходом не должно превышать 10 секунд. Победитель определяется наибольшим количеством полностью подбитых кораблей. Если их количество одинаково, то наибольшим количеством подбитых палуб (клеток).

	А	Б	В	Г	Д	Е
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Корабли:

 × 1 шт (3 палубы)

 × 2 шт (2 палубы)

 × 2 шт (1 палуба)

Всего: 5 кораблей (8 палуб)

Задача 9: Заряженный маятник (Егор Кузнецов)

Невесомый жёсткий стержень одним концом прикреплен к шарниру на потолке, а на другом его конце закреплен груз малых размеров. Период малых колебаний математического маятника оказался равным T_0 . Систему помещают в однородное электростатическое поле, направленное вертикально вверх, и заряжают стержень равномерно по длине таким положительным зарядом, что сила реакции со стороны шарнира оказалась равна нулю. Заряд по стержню не перераспределяется. Каким

будет период малых колебаний груза T_1 , если направление электростатического поля изменить на противоположное

Задача 10: одержимость. (Роман Черемнов)

Математик Тимур сошёл с ума. Украд из подвала школы паяльник и проволоку, он начал свои эксперименты.

Сначала он соорудил из проволоки треугольник и нашёл его центр масс (ему пришло озарение, и он выбрал некоторую точку внутри треугольника).

Затем он взял другой кусок проволоки, припаял один её конец к середине одной из сторон треугольника, провёл её через выбранный центр масс (оставаясь в плоскости треугольника) и обрезал так, чтобы второй конец упёрся в другую сторону треугольника. Этот конец он тоже припаял.

После этого, достав из кармана батарейку, он замкнул цепь, подключив её к двум точкам пайки. С дикими криками “КЛИВЕР!” он наблюдал, как две крайние стороны треугольника (те, к которым припаяна перемычка) горят с одинаковой яркостью.

Определите, действительно ли выбранная Тимуром точка была центром масс треугольника из проволоки.

Задача 11: Линза в стене (Елубай Бекасыл)

На тонкостенной стене имеется круглая дырка диаметра $D = 5$ см. В данную дырку вставили линзу такого же размера. На стену падают солнечные лучи вдоль вертикальной и перпендикулярной стене плоскости. На обратной стороне имеется вертикальный экран, на который падают лучи, проходящие через линзу. Если расположить экран на расстояниях $x_1 = 60$ см и $x_2 = 90$ см, то окажется, что размер яркого пятна на экране в этих двух случаях одинаков. Найдите диаметр ярких пятен на экране, получаемых на расстояниях x_1, x_2 .

Задача 12: Рубрика эксперименты! (Дамир Курман)

Илияс хочет пить, но он хочет знать, сколько воды он выпьет. Предложите способ вычисления объема воды в бутылке с квадратным поперечным сечением, сторона которого равна a , и высотой b , если у Илияса есть только транспортёр. Илиясу лень, поэтому минимизируйте количество измерений

Задача 13: Космическое трение (Илья Дрожжин)

Спутник вращается по круговой орбите вокруг Земли. Из-за небольшой высоты спутника происходит трение об атмосферу. Как изменится кинетическая энергия спутника, если трение совершит над ним работу 1 Дж? Трение считать небольшим

Задача 14: Карикатура на Атом Лития (Санжар Бисенали)

Дан шар радиусом a с равномерной плотностью и общим зарядом $-3q$. Предположим, что вы расположили внутри шара три протона с зарядом q , и шар с электронами магическим образом никак не изменился (все еще имеет равномерную плотность). Найдите равновесное расположение трех протонов внутри шара.

Второй тур. Старшая лига

Задача 15: Капитанская задача (*Илья Дрожжин*)

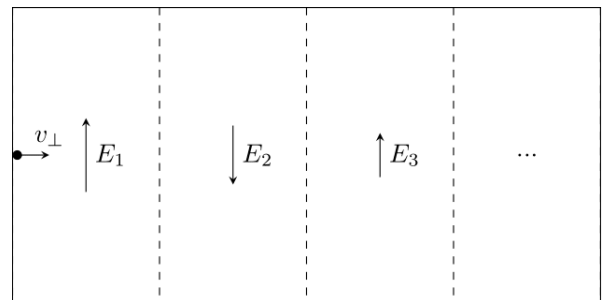
Сколько раз нужно сложить лист бумаги пополам, чтобы его толщина была равна расстоянию от Земли до Плутона?

Задача 16: Пуля винтового ружья (*Қайнар Сұраған*)

В качестве школьного проекта студенты Джон и Курт решили соорудить модель винтового ружья. Основной идеей винтового ружья является закручивание пули для уменьшения разброса из-за сил сопротивления окружающей среды. В дуле ружья нанесена винтовая резьба с ходом 254 мм, а измерения с помощью компьютерной модели показали, что вращательная составляющая кинетической энергии составляет 30% от общей кинетической энергии. Зная, что масса пули 7.4 г, а полная кинетическая энергия при вылете равняется 1700 Дж, найдите радиус инерции сечения этой пули.

Задача 17: Корабль Азамата (*Дамир Курман*)

Азамат построил корабль который имеет заряд q и влетает со скоростью v_{\perp} как показано на рисунке, поле E_1 затухает медленно и **равномерно дискретно по зонам** до какой то N зоны где $E_N = 0$. Найти конечную скорость и сдвиг параллельно полю, если известны ширина каждой зоны l , начальное поле



E_1 , заряд q , скорость v_{\perp} , масса корабля m , число зон $N \gg 1$.

Задача 18: В очень старом учебнике... (*Амирбек Азатбеков*)

Полупространство $x > 0$ заполнено веществом с постоянным удельным сопротивлением ρ . В точке $(a, 0, 0)$ впускается ток I . Найдите распределение потенциала $\varphi = \varphi(x, y, z)$ при $x > 0$, если потенциал на бесконечности равен нулю.

Задача 19: Граничные условия (*Адриан Ревковский*)

Теплоизолированный сосуд размерами $L \times L \times 2L$ разделён теплопроводящим поршнем массой M ($M \gg m$, где m – масса молекулы) на два куба, объёмом $V = L^3$. По обе стороны от поршня находится одноатомный идеальный газ. В начальный момент давление газа P_0 . Поршню придают скорость v_0 . Найти период колебания T , полагая их малыми, в двух случаях:

1. $\frac{m_0}{M} \gg \frac{V_0}{V}$
2. $\frac{m_0}{M} \ll \frac{V_0}{V}$

Где m_0, V_0 – масса и объём всего газа соответственно, N – количество молекул.

Задача 20: Опасная парабола (*Аргын Сейткамит*)

Альтаир нашел водяной пистолет из своего детства. Не долго думая, он наполнил пистолет большим количеством воды и пошел искать Илияса. Увидев его, Альтаир начал бездумно стрелять во все стороны с постоянной скоростью струи. Илияс заметил, что зона поражения воды имеет форму параболы, и начал убегать. Убегая от Альтаира, он приблизился к шару ЭКСПО. Сосредоточив чакру в ногах, он взобрался на вершину шара. Альтаир, в свою очередь, нашел кнопку, позволяющую изменять скорость выхода струи. Радиус шара ЭКСПО R , ускорение свободного падения g . Помогите Альтаиру найти минимальную скорость струи, нужную, чтобы попасть в Илияса. Размерами Илияса и Альтаира, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 21: Цветами Радуги (*Амирбек Азатбеков*)

При преломлении луча Солнца внутрь капли воды, затем её внутреннем отражении, и наконец её преломлении наружу, появляется радуга. Найдите угловой радиус радуги. Коэффициент преломления воды $n = 1.33$.

Второй тур. Младшая лига

Задача 22: Капитанская задача (*Илья Дрожжин*)

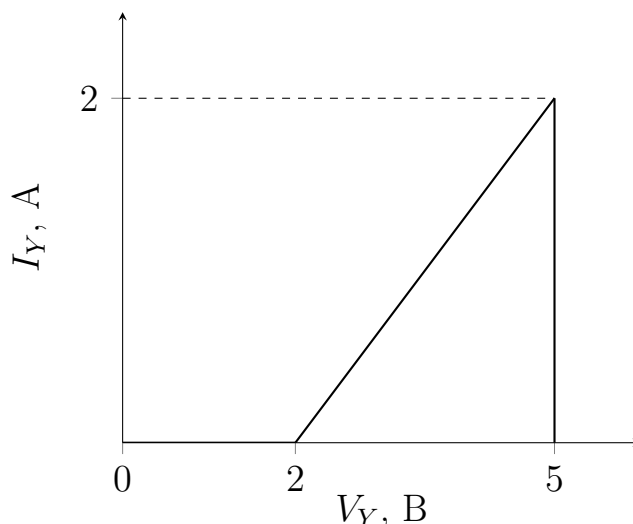
Сколько раз нужно сложить лист бумаги пополам, чтобы его толщина была равна расстоянию от Земли до Плутона?

Задача 23: Пуля винтового ружья (*Қайнар Сұраған*)

В качестве школьного проекта студенты Джон и Курт решили соорудить модель винтового ружья. Основной идеей винтового ружья является закручивание пули для уменьшения разброса из-за сил сопротивления окружающей среды. В дуле ружья нанесена винтовая резьба с ходом 254 мм, а измерения с помощью компьютерной модели показали, что вращательная составляющая кинетической энергии составляет 30% от общей кинетической энергии. Зная, что масса пули 7.4 г, а полная кинетическая энергия при вылете равняется 1700 Дж, найдите радиус инерции сечения этой пули.

Задача 24: Второй элемент (*Даниэль Тюлюбаев*)

Закон Ома, утверждающий о пропорциональности тока напряжению, не является фундаментальным и имеет ограниченную область применения. Элементы, для которых он не выполняется, называются нелинейными. Одним из ярких примеров таких элементов является лампа накаливания. С ростом температуры вольфрамовой нити (в работе она достигает значений около 3000°C), вызванным текущим по ней током, значение V/I увеличивается.



Ток, проходящий через нелинейный элемент X , зависит от напряжения на нем следующим образом: $I_X = \alpha\sqrt{V_X}$, где $\alpha = 1 \text{ АВ}^{-1/2}$. Вольт-амперная характеристика элемента Y дана на рисунке. Их соединили последовательно и подключили к источнику напряжения V . Постройте качественный график зависимости тока в цепи от напряжения на источнике $I(V)$ в диапазоне от 0 В до 10 В.

Подсказка: в качественном графике указываются координаты только ключевых точек и отображается общее поведение графика.

Задача 25: Равновесие карандаша (*Бекасыл Елубай*)

Имеется тонкий карандаш, который представляет собой цилиндр длины l , а радиус можно считать малым по сравнению всеми расстояниями вводимыми в рамках данной задачи. Карандаш поставили между двумя вертикальными стойками высоты h как показано на рисунке справа. Коэффициент трения между карандашом и стойкой μ . Стойки остаются неподвижными в любом случае и расположены на

расстоянии D друг от друга. Прямо под левой стойкой находится левый конец карандаша. При каких условиях для l и μ карандаш будет находится в равновесии?

Задача 26: Идеализм Артура (*Илияс Казымбек*)

Артур любит делать идеальные сальто и мечтает побить школьный рекорд, равный 3 оборотам за прыжок. Артур не любит разминаться, поэтому можете считать его однородной палкой массой $m = 40$ кг и длиной $l = 2$ м. В качестве прыжка он может придать себе импульс $p = 200$ кг м/с от стоп в любом направлении.

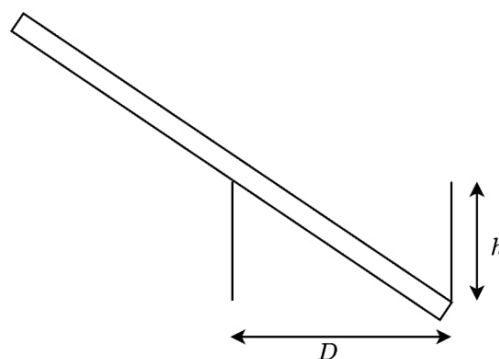
Рассчитайте, под каким углом к вертикали Артур должен направить свой импульс, чтобы воплотить мечту в реальность, сделав 4 идеальных оборота за прыжок. Идеальное сальто – прыжок с целым количеством оборотов. Считайте $g = 10$ м/с²

Задача 27: Опасная парабола (*Аргын Сейткамит*)

Альтаир нашел водяной пистолет из своего детства. Не долго думая, он наполнил пистолет большим количеством воды и пошел искать Илияса. Увидев его, Альтаир начал бездумно стрелять во все стороны с постоянной скоростью струи. Илияс заметил, что зона поражения воды имеет форму параболы, и начал убегать. Убегая от Альтаира, он приблизился к шару ЭКСПО. Сосредоточив чакру в ногах, он взобрался на вершину шара. Альтаир, в свою очередь, нашел кнопку, позволяющую изменять скорость выхода струи. Радиус шара ЭКСПО R , ускорение свободного падения g . Помогите Альтаиру найти минимальную скорость струи, нужную, чтобы попасть в Илияса. Размерами Илияса и Альтаира, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 28: Цветами Радуги (*Амирбек Азатбеков*)

При преломлении луча Солнца внутрь капли воды, затем её внутреннем отражении, и наконец её преломлении наружу, появляется радуга. Найдите угловой радиус радуги. Коэффициент преломления воды $n = 1.33$.



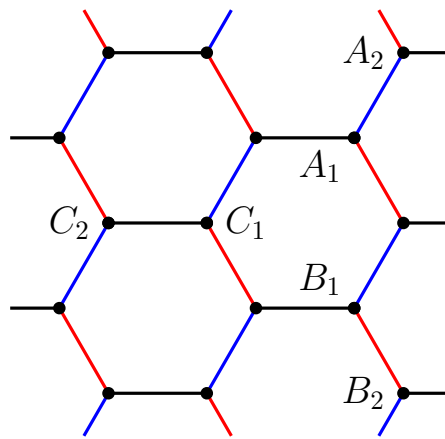
Третий тур. Старшая лига

Задача 29: Капитанская задача (*Бекасыл Елубай*)

На рисунке ниже представлена территория неизвестной страны. Вам дается три попытки, чтобы угадать данную страну. После каждой попытки показывайте свой ответ жюри. Участники не обязаны отдавать ответы по очереди, то есть может быть, что один капитан укажет подряд три ответа, пока второй не даст ни одного. Первый, кто угадает страну выигрывает. После трех попыток, ответы участников не засчитываются. В случае, если оба участника не смогли угадать страну по истечению времени или уже утратив все попытки, победителем считается тот, кто указал самую ближнюю по расстоянию страну. Другими словами, даже если вы не точно угадали страну, можете выиграть если укажете соседнюю или близкую к данной стране страну чем ваш противник.

**Задача 30: Пчелиные соты** (*Егор Кузнецов*)

В бесконечной симметричной шестиугольной решётке сопротивление любого ребра составляющего угол $\pi/3$ против часовой стрелки с горизонтальным (синие рёбра) – r_1 , сопротивление любого ребра составляющего угол $\pi/3$ по часовой стрелки с горизонтальным (красные рёбра) – r_2 , а сопротивление любого горизонтального ребра (чёрные рёбра) – r_3 . Найдите сопротивление R_3 сетки между точками C_1 и C_2 , если известно, что сопротивление сетки между точками A_1 и A_2 равно R_1 и сопротивление сетки между точками B_1 и B_2 равно R_2 .



Задача 31: йинежабрази дотеМ (Роман Черемнов)

Перед заземлённой проводящей сферой радиуса r , расположили объект с неким распределением зарядов. Оказалось, что изображение этого распределения зарядов выглядит как равномерно заряженное кольцо радиуса $R < r$ и линейной плотностью заряда λ . Найдите форму и закон распределения зарядов у реального объекта.

Внимание: Требуется четко указать форму и расположение объекта относительно сферы.

Задача 32: Падение (Егор Кузнецов)

Стоя на высокой горе, из одной точки Птолемей одновременно бросил в разные стороны от себя два камня под произвольными углами к горизонту (большими нуля). Один камень он бросил с известной скоростью v_1 , а второй с неизвестной скоростью v_0 . Спустя некоторое время скорости камней оказались равны v_2 и v соответственно, при этом расстояние между ними стало равно S . Найдите минимальное значение скорости v_0 , при которой такая ситуация могла быть реализована. Ускорение свободного падения равно g . Сопротивлением воздуха пренебречь. Считайте, что камни не сталкивались ни с горой, ни с землёй.

Задача 33: Наивный Альтаир... (Роман Черемнов)

Джигит Альтаир очень любит физику, особенно оптику и вот однажды, когда он скакал по степи на своём верном коне, он заметил, что может видеть очень-очень далеко за горизонт, ему даже казалось, что где-то там он видел Кипр!. Зная, что свет распространяется прямолинейно, Альтаир сразу заключил, что Земля плоская, давайте жестоко опровергнем его точку зрения с помощью соотношения Гладстона-Дейла. Найдите при каком градиенте температуры возможен эффект наблюдаемый Альтаиром. Считайте, что Земля - идеальный шар с радиусом R . Соотношение Гладстона-Дейла, D - постоянная, ρ - плотность воздуха, n - показатель преломления:

$$\frac{n - 1}{\rho} = D$$

Третий тур. Младшая лига

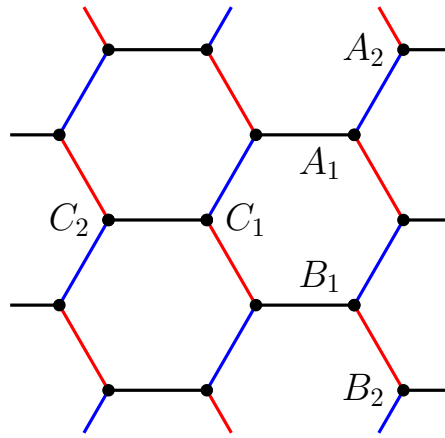
Задача 34: Капитанская задача (*Бекасыл Елубай*)

На рисунке ниже представлена территория неизвестной страны. Вам дается три попытки, чтобы угадать данную страну. После каждой попытки показывайте свой ответ жюри. Участники не обязаны отдавать ответы по очереди, то есть может быть, что один капитан укажет подряд три ответа, пока второй не даст ни одного. Первый, кто угадает страну выигрывает. После трех попыток, ответы участников не засчитываются. В случае, если оба участника не смогли угадать страну по истечению времени или уже утратив все попытки, победителем считается тот, кто указал самую ближнюю по расстоянию страну. Другими словами, даже если вы не точно угадали страну, можете выиграть если укажете соседнюю или близкую к данной стране страну чем ваш противник.



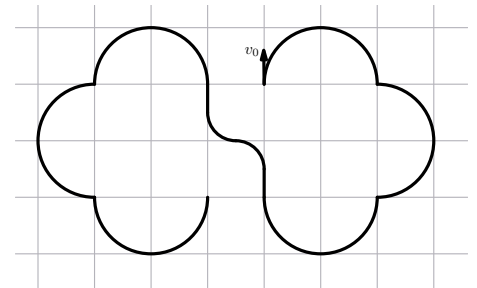
Задача 35: Пчелиные соты (*Егор Кузнецов*)

В бесконечной симметричной шестиугольной решётке сопротивление любого ребра составляющего угол $\pi/3$ против часовой стрелки с горизонтальным (синие рёбра) – r_1 , сопротивление любого ребра составляющего угол $\pi/3$ по часовой стрелки с горизонтальным (красные рёбра) – r_2 , а сопротивление любого горизонтального ребра (чёрные рёбра) – r_3 . Найдите сопротивление R_3 сетки между точками C_1 и C_2 , если известно, что сопротивление сетки между точками A_1 и A_2 равно R_1 и сопротивление сетки между точками B_1 и B_2 равно R_2 .



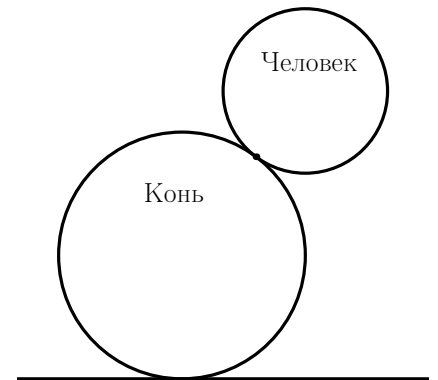
Задача 36: А F-1 В (Роман Черемнов, Егор Кузнецов)

Вдоль проволоки изображённой на рисунке ниже скользит бусинка с начальной скоростью v_0 . С какой скоростью бусинка вылетит с другого конца проволоки. Считайте, что коэффициент трения равен μ . Силу тяжести не учитывайте. На участках резкого изгиба(уголки) всё достаточно плавно, чтобы бусинка не застревала.



Задача 37: Вращение лошади (Ильяс Казымбек)

В данной задаче можно считать лошадь идеальным шарообразным объектом с радиусом $2R$ и массой M . На протяжении тысяч лет одним из важнейших способов применения лошадей было переносить вещи вместе с людьми. Можно считать человека шаром радиусом R и массой m , балансирующим на лошади. Проскальзывания между лошадью и землёй нет. Трения между Лошадью и человеком нет. Мощность лошади — P . Сила сопротивления воздуха для шара радиусом r выражается как



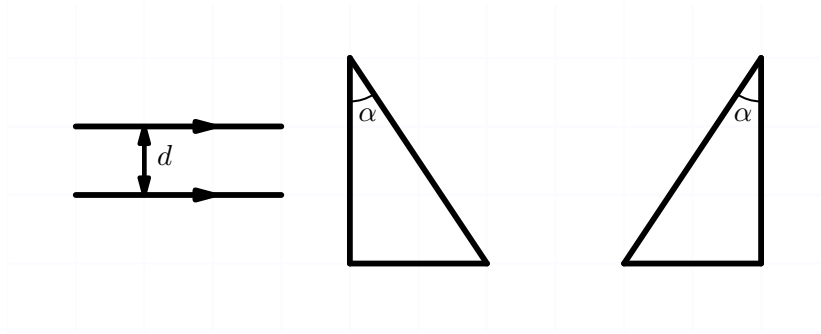
$$F = kr^2v^2 \tag{0.1}$$

Ускорение свободного падения g направлено вниз. Найдите максимальную скорость V лошади при движении. Чему будет равен угол между центрами человека и лошади и вертикалью при максимальной скорости?

Задача 38: Анаморфная пара призм (Санжар Бисенали)

Анаморфная пара призм позволяет уменьшать или увеличивать ширину пучка лучей, не изменяя его направления. Призмы показанные на рисунке можно вращать и перемещать в плоскости рисунка. Определите положение при котором система призм будет анаморфной. Определите фактор увеличения/уменьшения данной системы призм, зная что угол призмы равен α , а показатель преломления n .

Изначальное направление пучка лучей указано на рисунке



Четвертый тур. Старшая лига

Задача 39: Капитанская задача (*Бекасыл Елубай*)

Связи

На таблице ниже даны 16 слов или чисел. Разделите эти слова на 4 группы, состоящие из 4 чисел.

24	18000	59	1
23	31	12	3
48	2	89	40
1045	4	36	99

Задача 40: Губка Боб (*Роман Черемнов*)

Твёрдый однородный кубик массы m с длиной стороны a , изготовлен из материала с модулем юнга E и коэффициентом Пуассона σ . Его положили на водную гладь и заметили, что он не тонет. Кубик медленно опускается вертикально в глубокий водоём. Атмосферным давлением и вязкостью воды пренебречь. Считайте, что под действием гидростатического давления кубик сжимается равномерно (во всех направлениях) и сохраняет форму куба.

Найдите глубину h , на которой кубик будет находиться в равновесии

Подсказка: если умножить коэффициент Пуассона на относительное сжатие по одной оси, то получите относительное удлинение по другой оси.

Задача 41: ЮАА голд (*Азамат Аймуратов*)

К планете Азамат (масса $M = 5.50 \cdot 10^{28}$ кг) приближается комета ЮАА радиусом $R = 6.7$ км и средней плотностью $\rho = 600$ кг/м³. При каком минимальном расстоянии d от центра планеты Азамат приливные силы планеты начнут разрывать комету ЮАА, если считать, что её частицы скреплены только собственной гравитацией? Атмосферой и вращением пренебречь.

Задача 42: Домбрадость (*Владимир Литвинов*)

Васина домбра устроена следующим образом: струны колеблются между закрепленным верхним порожком и передвижным нижним. Для изменения частоты колебаний по длине струны расположены лады, зажимая которые Вася меняет свободно колеблющуюся длину струны, а следовательно и высоту звука.

Современный музыкальный строй подразумевает, что соотношение между частотами соседних нот одинаково и равно α . Верхний порожек можно считать ладом номер 0. В таблице приведены координаты всех ладов, считая лад 0 расположенным в начале координат.

1. Найдите α .
2. Найдите координату нижнего порожка L .
3. Мастер, который делал домбру, криво закрепил один из ладов. Найдите его номер N .

Лад n	0	1	2	3	4	5
Координата x_n (см)	0	25.00	43.75	61.25	68.36	76.27

Задача 43: Магнитик на холодильнике (*Илья Пластинин*)

Найди угловую частоту малых колебаний однородно намагниченного металлического шарика массы m , радиуса r и намагниченности J . Шарик находится на толстой железной пластине с большой магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. Пренебрегайте гравитацией в этой задаче

Задача 44: Статистическая Термодинамика (*Нурасыл Барлыбаев*)

В сосуде объёмом V находится разреженный газ, состоящий из N полярных молекул (например, HCl , NH_3 , и т.п.). Эти молекулы имеют постоянный дипольный момент p , но в отсутствие внешнего поля диполи ориентированы хаотично. Газ находится при температуре T , и подчиняется уравнению состояния идеального газа.

Вдоль сосуда включают однородное электрическое поле E , которое вызывает частичную ориентацию диполей. Поле включается медленно, чтобы избежать неравновесных эффектов. Рассмотрите систему в пределе высоких температур или слабых полей, где энергия взаимодействия pE много меньше характерной тепловой энергии kT . То есть, пусть $\frac{pE}{kT} \ll 1$.

1. Найдите изменение внутренней энергии газа после включения поля.
2. Найдите выражение для изменения теплоёмкости при постоянном объёме C_V с учётом действия электрического поля.
3. Используя предоставленную таблицу с данными, определить величину дипольного момента p для каждой из указанных молекул.

Подсказки:

№	T (K)	ϵ
1	300	3.75
2	310	3.66
3	320	3.58
4	330	3.50
5	340	3.43

При $x \ll 1$, экспоненту можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться первыми двумя членами:

$$e^x \approx 1 + x$$

Термодинамическое уравнение плотности внутренней энергии диэлектрика (в электрическом поле)

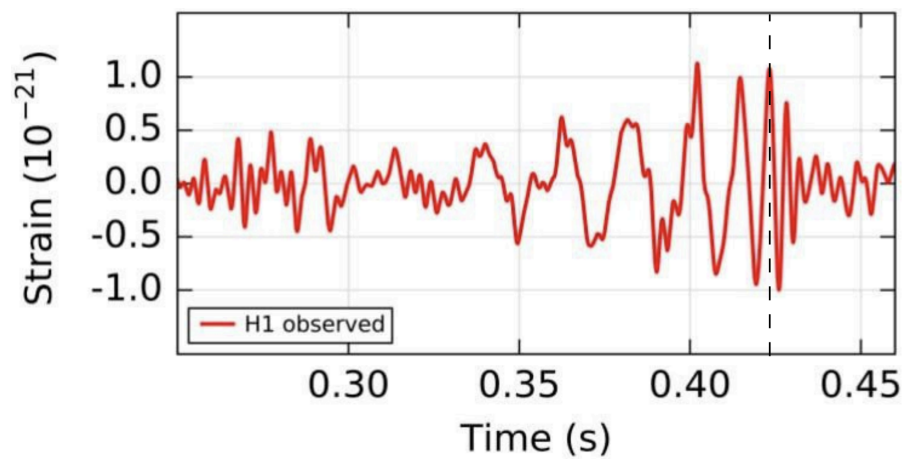
$$U = \left(\epsilon + T \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right) \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + U_0(T, \tau)$$

Считайте известными $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м, $k \approx 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К и $n = 10^{28}$ м⁻³.

Задача 45: Гравитационные волны (Амир Пшенбаев)

14 сентября 2015 г. установками LIGO была зарегистрирована гравитационная волна, рожденная в процессе слияния двух черных дыр, вращавшихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Временная зависимость сигнала, пропорционального амплитуде волны, изображена на рисунке. В момент слияния (отмеченный штриховой линией) излучение прекращается.

Оцените массу возникшей черной дыры, рассматривая исходные дыры как точечные массы m_1 и m_2 , взаимодействующие по закону Ньютона и обращающиеся по круговым орбитам вокруг центра масс. Считайте, что в момент слияния расстояние между ними равно $r_s = 2G(m_1 + m_2)/c^2$ (радиус Шварцшильда), где G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Период гравитационной волны, равный половине периода обращения системы, следует оценивать в области штриховой линии на графике. Также считайте, что после слияния потеря массы отсутствует (сумма масс черных дыр до слияния равна массе возникшей черной дыры).



Четвертый тур. Младшая лига

Задача 46: Капитанская задача (*Бекасыл Елубай*)

Связи

На таблице ниже даны 16 слов или чисел. Разделите эти слова на 4 группы, состоящие из 4 чисел.

24	18000	59	1
23	31	12	3
48	2	89	40
1045	4	36	99

Задача 47: Vicking щииит! (*Владимир Литвинов*)

Дракар вмещает до пяти викингов. Каждый викинг гребёт с постоянной силой F при толчке длительностью t_1 , затем возвращает весло за время $n \cdot t_2$ (в этот интервал он не создаёт тяги). Для простоты поперечное сечение лодки длиной l является равнобедренным треугольником, направленным вершиной вниз. Пренебрегая разницей давлений с торцов дракара, сопротивление воды аппроксимируется законом

$$F_r = a S^2 v,$$

где S — площадь поверхности корпуса, контактирующая с водой, v — скорость дракара в воде, a — известный коэффициент сопротивления (константа).

Рост времени возвращения весла с количеством викингов n обусловлен тем, что им становится сложнее балансировать, дракар раскачивается... И бедные викинги смотрят как их щиты падают в воду, выкрикивая название этой задачи.

Найдите максимальную скорость v_{max} , с которой может стабильно плыть дракар. При каких условиях это произойдет?

Задача 48: Спираль или лестница? (*Бекасыл Елубай*)

Вода нагревается внутри чайника за счёт тонкой проволоки. Проволока представляет собой спираль с радиусом R и шагом h . Считайте, проволока имеет огромное количество витков. Ахмаджон решил растянуть спираль в длинную прямую

Параметр	Значение
Число гребцов (максимально) N	5
Сила одного гребца при толчке F	520 Н
Длительность толчка t_1	1.0 с
Время возврата весла t_2	1.0 с
Угол при вершине α	$\frac{2\pi}{3}$
Длина корпуса l	10.0 м
Коэффициент сопротивления a	$\frac{3\sqrt{3}}{64} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-4}$
Масса драккара M	800 кг
Масса одного викинга m	80 кг

проволоку и разрезать её. Длина каждой полученной проволоки равна длине изначальной спирали (не длине растянутой проволоки), то есть расстоянию между контактами. Полученные проволоки соединяются между контактами параллельно и нагревают воду как прежде, в результате его схема была похожа на лестницу. Считайте, что всё тепло, выделяемое на проволоке, идёт на нагрев воды. За какое время вода нагреется до кипения, если раньше на это уходило t_1 ?

Задача 49: Жидкая темка (*Қайнар Сұраған*)

Любитель физики Болат, помогая дома, обнаружил интересное наблюдение: если погрузить кесе в обычном состоянии в воду и перевернуть, становится сложно вытащить его вверх-дном. Предположим, что внутренность кесе это идеальная полусфера радиусом 10 см и при поднятии внутри кесе воздух всегда отсутствует. Масса кесе 250 г, толщина стенок 2 мм, причем внешняя сторона также является полусферой. Болат начинает медленно вытаскивать кесе. Зная эти данные, найдите минимальную и максимальную силу, которую Болат прилагает во время поднятия кесе. Атмосферное давление равняется 10^5 Па, плотность воды 10^3 кг/м³, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с²

Задача 50: Тайвань или Тайланд (*Владимир Литвинов*)

Транзистор (Т-элемент на схеме) - особый элемент с тремя контактами (трипод), для которого верно, что от напряжения между двумя контактами прямо пропорционально зависит максимальный ток через третий. Таким образом, при помощи небольшого напряжения U , можно модулировать напряжение на нагрузке R_x вплоть до значительного E . При этом, через контакты 0 и U ток пренебрежимо мал.

$$I_{max} = kU$$

где k — известный коэффициент

(1) - Найдите зависимость $P_{(U)}$ рассеиваемой на транзисторе мощности P от

потенциала U

В современном музыкальном строе нота Ля четвертой октавы имеет частоту 440 Гц. Между первым и вторым контактом транзистора пускают прямоугольные импульсы напряжения частотой 440 Гц и длительностью 1760^{-1} с. Напряжение колеблется от 0 до $E/2kR$.

(2) - Найдите среднюю мощность потерь через транзистор за большой промежуток времени.

Октава - базовый музыкальный интервал, с различием частот двух нот в два раза. У большинства звуков, в том числе и в природе, октава - это первый обертон. К предыдущему сигналу добавляется нота Ля пятой октавы - сигнал в два раза большей частоты, но с импульсами такой же длины и амплитуды. Оба сигнала начинают в фазе.

(3) - Найдите новую среднюю мощность. Какой она будет, если новый сигнал начать на 1760^{-1} с после начала предыдущего?

Квинта - второй обертон пониженный на октаву, или частота в $3/2$ раза больше предыдущей. Теперь на транзисторе сумма следующих сигналов:

1. $A_4 = 440$ Гц

2. $E_5 = 660$ Гц

3. $A_5 = 880$ Гц

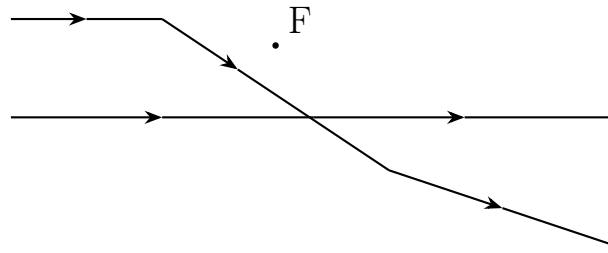
* - периодом бесконечного звукоряда считается октава. Индекс - номер октавы. Частоты указаны в натуральном, а не равномерно темперированном строе

Такое созвучие называется *powerchord* - или *пацанская квинта*. Оно составляет основу рока, и каждый гитарист давно вбил его себе в пальцы. Все сигналы начинаются в фазе, длина каждого пика 2640^{-1} с, напряжение в каждом сигнале колеблется от 0 до $E/2kR$.

(4) - Найдите среднюю мощность потерь через транзистор. Какой она будет, если увеличить мощность каждого сигнала в два раза?

Задача 51: Оптический Бум! (Ален Ускембаев)

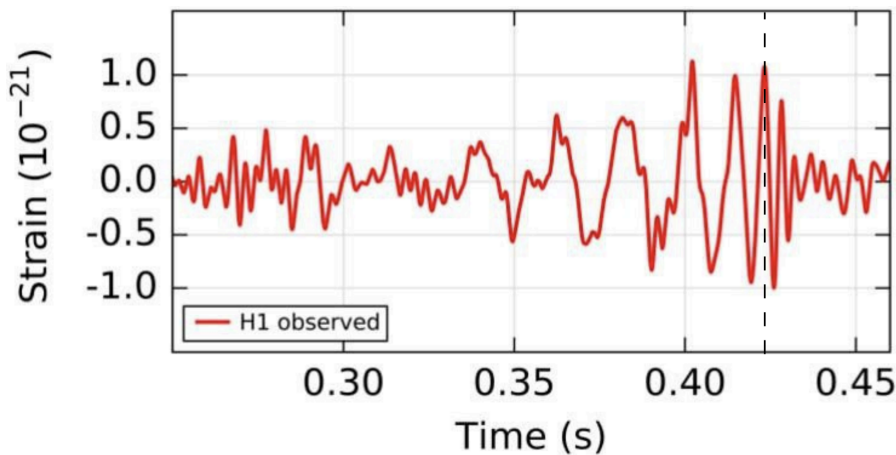
На рисунке показан ход двух параллельных лучей через две одинаковые собирающие линзы, которые не параллельны друг другу. Фокусы линз совпадают в точке F. **Используя только циркуль и линейку**, выполните построение, чтобы показать расположение линз и их главных оптических осей на рисунке.



Задача 52: Гравитационные волны (Амир Пшенбаев)

14 сентября 2015 г. установками LIGO была зарегистрирована гравитационная волна, рожденная в процессе слияния двух черных дыр, вращавшихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Временная зависимость сигнала, пропорционального амплитуде волны, изображена на рисунке. В момент слияния (отмеченный штриховой линией) излучение прекращается.

Оцените массу возникшей черной дыры, рассматривая исходные дыры как точечные массы m_1 и m_2 , взаимодействующие по закону Ньютона и обращающиеся по круговым орбитам вокруг центра масс. Считайте, что в момент слияния расстояние между ними равно $r_s = 2G(m_1 + m_2)/c^2$ (радиус Шварцшильда), где G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Период гравитационной волны, равный половине периода обращения системы, следует оценивать в области штриховой линии на графике. Также считайте, что после слияния потеря массы отсутствует (сумма масс черных дыр до слияния равна массе возникшей черной дыры).



Пятый тур. Старшая лига

Задача 53: Капитанская задача (*Бекасыл Елубай*)

Вам дан код программы, написанной на языке C. Последняя строка выводит значение переменной r . Что выведет данная программа?

```
int n = 34;
int r = 0;

while (n > 29)
{
    r = r + n;
    n = n - 2;
}
printf("%i", r);
```

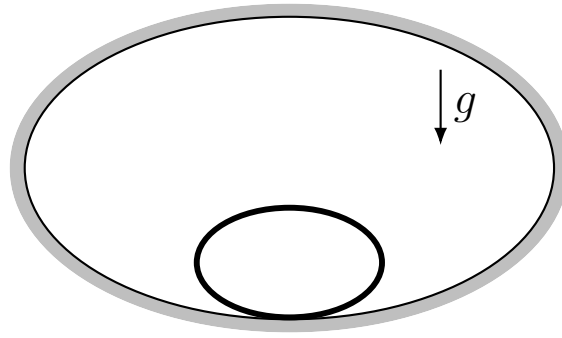
Задача 54: Два проводящих шара в диэлектрике (*Нурасыл Барлыбаев*)

В бесконечной однородной среде с электропроводностью λ и диэлектрической проницаемостью ε находятся два идеально проводящих шара радиуса R , помещённые на расстоянии $d \gg R$ друг от друга. В начальный момент времени один из шаров имеет заряд Q_0 , а другой $-Q_0$. Через первый шар втекает ток $I(t)$, а из второго вытекает тот же ток $I(t)$, то есть система замкнута, и ток протекает от одного шара к другому через среду.

1. Найдите ток $I(t)$ во времени.
2. Найдите количество теплоты, выделившееся в среде от $t = 0$ до $t \rightarrow \infty$.
3. Изобразите систему в виде эквивалентной электрической схемы и определите параметры, характеризующие её способность накапливать заряд и проводить ток.

Задача 55: Кривые трубы (*Егор Кузнецов*)

Чему равен период малых колебаний T однородной тонкостенной трубы эллиптического сечения с большой и малой полуосями a и b соответственно вблизи положения равновесия, показанного на рисунке ниже? Эта труба может свободно кататься без проскальзывания вблизи положения равновесия по неподвижной трубе эллиптического сечения подобного сечению начальной трубы с коэффициентом 3. В положении равновесия большие полуоси обеих труб горизонтальны. Ускорение свободного падения примите равным g .



Задача 56: Гонг (Владимир Литвинов)

Постояльцы вытрезвителя играли в шаолиньских монахов, и для этого им понадобился гонг. Охотник Ефим выяснил, что беличья кожа имеет плотность ρ . Джентльмены продолжили эксперименты, и натянули на круглую жесткую рамку кусок кожи известным радиусом r и толщиной d . Слесарь Бекжан положил на гонг болт. Масса болта m , гонг прогнулся на малую h_0 . Помогите профессору консерватории Алишеру определить частоту малюсеньких колебаний гонга, чтобы он настраивал по нему свою флейту.

Подсказка:

Алишер любит задачи на поверхностное натяжение, и при помощи ChatGPT выяснил следующие формулы: $z = (h/2) \cdot \frac{2a^2+h^2}{3a^2+h^2}$ - координата центра масс сферического сегмента $A = \pi(a^2 + h^2)$ - площадь сферического сегмента.

Задача 57: Экзопланета (Нурасыл Барлыбаев)

Представьте экзопланету, которая состоит из твёрдого сферического каменного ядра радиусом $R = 100000$ км и покрыта глобальным океаном пресной воды. Планета вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 5.6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Вам нужно решить последующие пункты, считая, что воды достаточно много, но её масса пренебрежимо мала по сравнению с массой ядра которая равна $M = 1.47 \cdot 10^{27}$ кг:

«Водяной горб»: Найдите разность уровней океана между экватором и полюсом ($\Delta h = h_{\text{экв}} - h_{\text{пол}}$). То есть, насколько океан на экваторе «глубже» (или выше от центра), чем на полюсе?

Парадокс давления: Где давление воды на дне океана (на поверхности твёрдого ядра) больше: на экваторе или на полюсе? И на какую величину ΔP ?

Подсказки:

1. Подумайте насчет потенциала в зависимости от радиуса и угла от оси вращения
2. Вспомните обобщенную формулу Бернулли

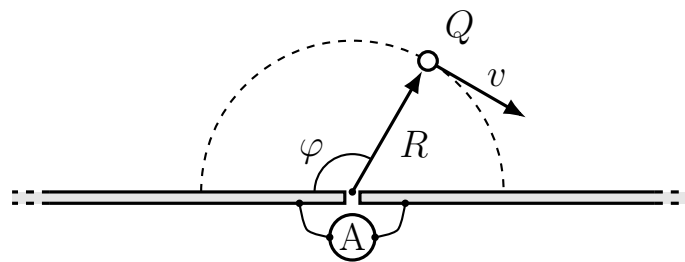
Задача 58: 2 men 2 pucks (Аргын Сейткамит)

Амирбек с Дамиром решили поиграть в хоккей. После очень близкого матча, они сильно устали. Дамир взял клюшку длины L и массы m , а также две маленькие шайбы, удерживая клюшку с их помощью за оба её конца. Амирбек вспомнил забавный факт: коэффициент статического трения шайбы о клюшку μ_s , а коэффициент трения скольжения μ_k ($\mu_s \geq \mu_k$). Дамир задумался над следующим

вопросом: какую работу надо совершить, чтобы он смог медленно подвести обе шайбы к центру ключки? При этом, пока одна шайба скользит, другая стоит на месте. Амирбек оказался в замешательстве. Помогите им решить данную задачу.

Задача 59: Над ущельем (Егор Кузнецов)

Две одинаковые очень большие незаряженные металлические пластины удерживаются близко друг к другу так, что они образуют очень большую плоскость с небольшой щелью. Пластины соединены идеальным амперметром. Вблизи поверхности левой пластины на расстоянии R , много меньшем размеров пластин и много большем зазора между пластинами, от щели ($\varphi = 0$) помещают точечный заряд Q . Его начинают перемещать с постоянной скоростью v по дуге окружности радиуса R с центром в зазоре между пластинами.



А. (7 баллов) Определите зависимость показаний амперметра от времени.

В. (5 баллов) Какую работу необходимо совершить при таком перемещении заряда из положения $\varphi = \frac{\pi}{6}$ в положение $\varphi = \frac{\pi}{2}$?

Пятый тур. Младшая лига

Задача 60: Капитанская задача (Бекасыл Елубай)

Вам дан код программы, написанной на языке C. Последняя строка выводит значение переменной r . Что выведет данная программа?

```
int n = 34;
int r = 0;

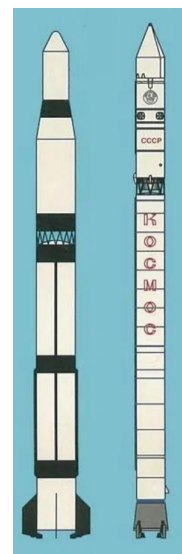
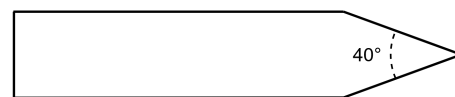
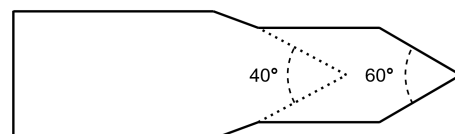
while (n > 29)
{
    r = r + n;
    n = n - 2;
}
printf("%i", r);
```

Задача 61: Глаза боятся... (Даниэль Тюлюбаев)

На выбор формы ракеты при её разработке влияет множество факторов от простоты производства до типа используемого топлива. В данной задаче мы рассмотрим, как форма влияет на аэродинамику ракеты.

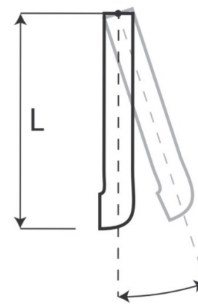
Расчет силы сопротивления воздуха, которая действует на ракету при ее полете внутри атмосферы — сложная задача, требующая компьютерного моделирования. Для ее упрощения мы будем использовать модель, где молекулы воздуха, неупруго сталкиваясь с ракетой, передают ей часть своего импульса. Трение отсутствует, всеми остальными эффектами пренебрегаем.

На рисунке 1 предоставлены две реальные ракеты с фиксированным диаметром и со ступенями разных диаметров. На рисунке 2 — рассматриваемые нами модели этих ракет в боковой проекции. Ракета A имеет диаметр $d = 1.8$ м. Ракета B — диаметры $D = 2.3$ м и $d = 1.8$ м большей и меньшей ступеней, соответственно. Найдите соотношение сил F_A/F_B , действующих на ракеты со стороны воздуха при полете в атмосфере.

Ракета A Ракета B 

Задача 62: Трубочка вертушечка (Ален Ускембаев)

Водопроводная труба длиной L и общей массой M закреплена на стене и может свободно вращаться в вертикальной плоскости, как физический маятник. Носик трубки изогнут на 90 градусов. В начальный момент времени $t = 0$ трубка покоится в вертикальном положении. Чтобы раскачать трубку, из нее начинают периодически выталкивать короткие порции воды. Каждая порция имеет массу Δm и вылетает со скоростью v . Процесс идеально синхронизирован для создания **резонанса**: каждый раз, когда трубка проходит нижнее положение (вертикаль), в направлении ее движения выталкивается очередная порция воды, мгновенно сообщая ей дополнительную энергию.

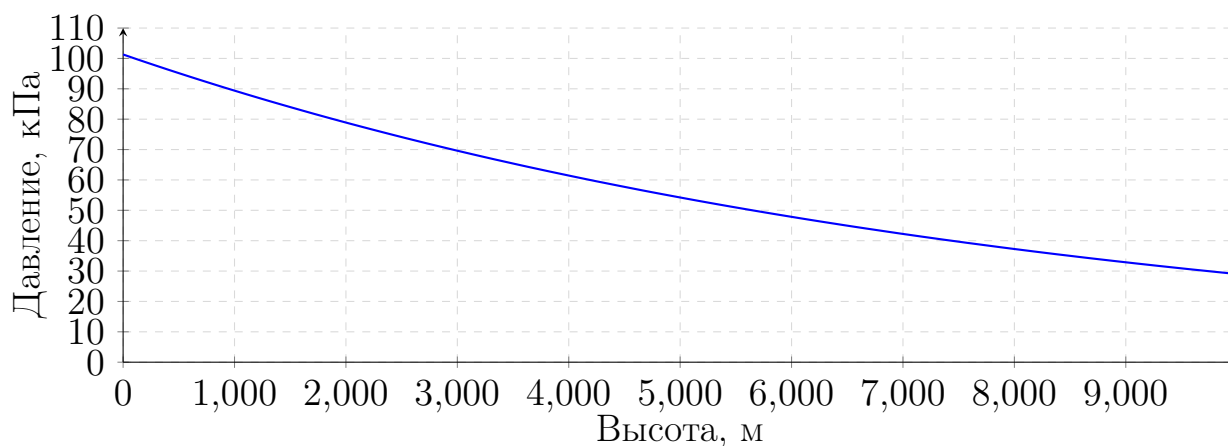


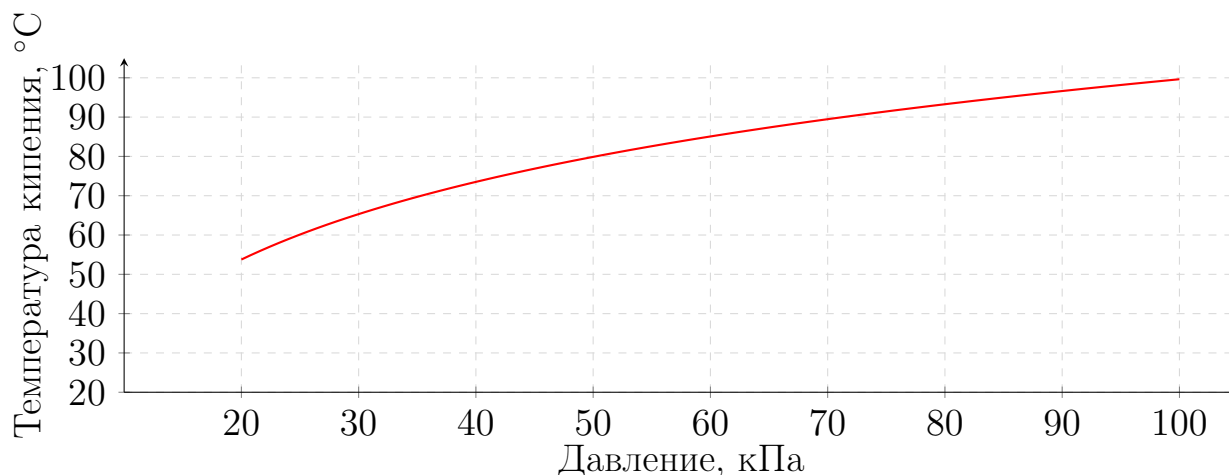
Через какое минимальное время t после начала раскачки трубка впервые достигнет горизонтального положения (отклонится на 90°)?

Ускорение свободного падения равно g . Массой вытекшей воды можно пренебречь по сравнению с массой трубки M . Считайте, что период колебаний трубки не зависит от амплитуды.

Задача 63: спешка. (Роман Черемнов, Азамат Аймуратов)

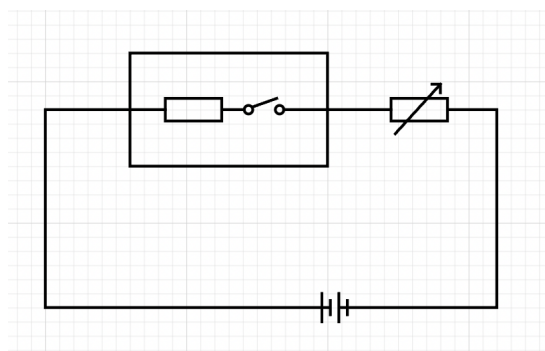
Денис вместе со своей семьёй часто ходит по горам. В очередной раз, выдвигаясь на пик Студент, они заметили, что отстают от графика. Поэтому они решили начать кипятить воду заранее, чтобы не тратить на это время во время привала. У них был нагреватель мощностью 500 Вт, который они положили в открытый сосуд с 5 л ледяной воды из источника температурой 0°C и начали подниматься. Денис рассчитал, что они поднимаются со средней скоростью 200 м/мин. Если нагреватель включили на высоте 1000 м над уровнем моря, а графики зависимости давления от высоты над уровнем моря и зависимости температуры кипения воды от давления показаны ниже. Рассчитайте, через сколько времени после включения нагревателя закипела вода?





Задача 64: Технолджия (Аргын Сейтками)

Тихий, но опасный физик Амир решил испытать свой новый предохранитель модели АРНВ-2025. Прибор состоит из резистора сопротивлением $r = 0.1$ Ом, который имеет удельную теплоёмкость $c = 500$ Дж кг⁻¹ К⁻¹ и массу $m = 1$ г, а также выключателя, размыкающего цепь. Выключатель срабатывает в момент, когда резистор нагревается до критической температуры $t_c = 70^\circ\text{C}$.



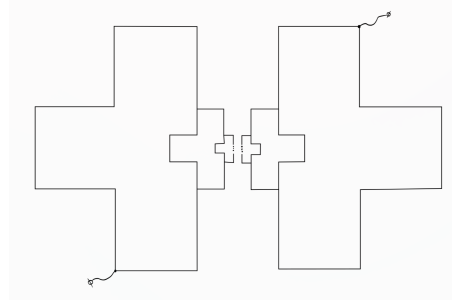
Чтобы его испытать, Амир собрал цепь, показанную на рисунке. В ней предохранитель АРНВ-2025 последовательно соединяют с переменным резистором R и источником постоянного напряжения $U = 2$ В.

В первом испытании на резисторе устанавливают напряжение $R_1 = 15$ Ом, и через некоторое время температура становится равной $t_1 = 60^\circ\text{C}$ и остаётся постоянной. Затем Амир начал медленно уменьшать сопротивление. Найдите сопротивление R_x резистора, когда прибор разомкнёт цепь.

Амир также установил, что при непосредственном подключении предохранителя к источнику напряжения цепь размыкается за время $\tau = 1$ с. Зависимостью сопротивления прибора от температуры пренебречь, комната поддерживается при постоянной температуре.

Задача 65: Закоротить принтеры (Адриан Ревковский, Роман Черемнов)

Борясь с растущим количеством элементов в принтере, Рома разобрал его и нашёл там цепь из резисторов в виде фрактала (рисунок ниже). Сопротивление ребра большого креста – r , которое с каждым новым фракталом уменьшается в 3 раза, удельное сопротивление и площадь всех рёбер одинакова. Найти сопротивление между точками A и B .



Задача 66: Мысли о гипершаре (Адриан Ревковский)

Известно, что гравитационный потенциал квадрата (пренебрежимо малой толщины) массой m и ребром l в одной из его вершин равен φ_0 . Найти:

1. Гравитационный потенциал в центре этого квадрата φ_1 .
2. Гравитационный потенциал в центре основания неоднородного цилиндра массой m , радиуса l , высотой l и радиально симметричным распределением плотности $\rho(r) \propto \frac{1}{r}$

Примечание: Гравитационным потенциалом системы в точке A называется отношение потенциальной энергии W тела массой m , помещенного в эту точку, к массе этого тела. $\varphi = \frac{W}{m}$

Решения задач

Первый тур. Старшая лига

Задача 1: Морской Бой (*Даниэль Тюлюбаев, Роман Черемнов*)

Побеждает тот, у кого осталось больше кораблей.

Задача 2: Заряженный маятник (*Егор Кузнецов*)

Период колебаний обыкновенного математического маятника в поле тяжести земли g для грузика на стержне длиной L можно найти по следующей формуле:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.1)$$

Теперь рассмотрим заряженный маятник в поле, направленном вертикально вверх. Сила реакции шарнира стала равна нулю, тогда. λ - линейная плотность заряда, m - масса грузика

$$\lambda LE = mg \quad (2.2)$$

Теперь поле направлено вниз. Момент инерции относительно точки подвеса $I = mL^2$. Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса для математического маятника, который отклонили на малый угол θ от положения равновесия:

$$I\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta - \int_0^L l \sin \theta \cdot E (\lambda dl) \quad (2.3)$$

$$mL^2\ddot{\theta} + \left(mg + \frac{\lambda LE}{2} \right) L \sin \theta = 0 \quad (2.4)$$

Используем приближение $\sin \theta \approx \theta$ и подставим сюда уравнение 9.2. Получим:

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0 \quad (2.5)$$

Отсюда

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (2.6)$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}T_0 \quad (2.7)$$

Содержание	Баллы
Правильно записан период колебаний математического маятника T_0	1

Правильно записано условие равновесия груза и стержня в электрическом поле	2.5
Правильно определён момент инерции системы	1
Правильно записано уравнение моментов относительно шарнира	4
Правильно найдено уравнение гармонических колебаний	2.5
Получен верный ответ	1

Задача 3: Горячие шары (*Курман Дамир*)

При абсолютно упругом ударе энтропия не меняется, так как не происходит теплообмена между шарами. Это также можно увидеть через квантовое определение энтропии:

$$S = k_B \ln \Omega \tag{3.1}$$

После столкновения энтропия системы не меняется, так как мы не теряем информацию о системе и не получаем дополнительной информации; поэтому число состояний, в которых может находиться система, не изменяется.

При абсолютно неупругом ударе шары переводят кинетическую энергию в тепло, благодаря чему увеличивается количество состояний, в которых система может существовать, другими словами — повышается энтропия.

Чтобы посчитать энтропию, нужно учитывать, что она является функцией состояния, и в конечном итоге у шаров устанавливается одинаковая температура. T_f

Закон Сохранения Энергии:

$$\frac{P^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{p_2^2}{2m_2} = -Q \tag{3.2}$$

Закон Сохранения Импульса:

$$P = m_1V_1 - m_2V_2 \tag{3.3}$$

Выделившаяся теплота перешла во внутреннюю энергию шаров, тогда используя, что $U_1(T_1) = C_1T_1$ и $U_2(T_2) = C_2T_2$ получим следующие уравнение

$$Q = U_1(T_f) + U_2(T_f) - U_1(T_1) - U_2(T_2) = T_f(C_1 + C_2) - C_1T_1 - C_2T_2 \tag{3.4}$$

Подставив в это уравнение, уравнение 3.2 мы получим

$$T_f = \frac{\left(-\frac{(m_1V_1 - m_2V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} + C_1T_1 + C_2T_2\right)}{C_1 + C_2} \tag{3.5}$$

Теперь используя определение энтропии $dS = \frac{dQ}{T}$, получим следующее уравнение

$$dS = \frac{C_1dT_1}{T_1} + \frac{C_2dT_2}{T_2} \tag{3.6}$$

Проинтегрируем это выражение от начальной температуры (T_1 и T_2) до конечной T_f , получим следующее выражение

$$\Delta S = C_1 \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) + C_2 \ln \left(\frac{T_f}{T_2} \right) \quad (3.7)$$

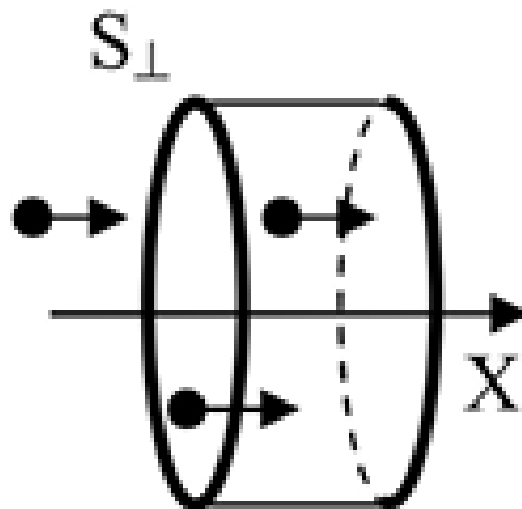
Подставляя в это выражение T_f из уравнения 3.5, получим наш конечный ответ

$$\begin{aligned} \Delta S = C_1 \ln \left(\frac{-\frac{(m_1 V_1 - m_2 V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + C_1 T_1 + C_2 T_2}{T_1 (C_1 + C_2)} \right) + \\ + C_2 \ln \left(\frac{-\frac{(m_1 V_1 - m_2 V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + C_1 T_1 + C_2 T_2}{T_2 (C_1 + C_2)} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Содержание	Баллы
Определяет что теплообмена не происходит	1
Определяет что энтропия не меняется	2
Пишет все законы сохранения (без частичных баллов если написан только 1 или другой)	2
Находит конечную температуру	2
Пишет что энтропия функция состояния	3
Находит конечное изменение энтропии	2

Задача 4: Пробойна (*Илья Дрожжин*)

Найдем поток молекул газа через маленькое сечение площадью S_{\perp} . Для этого рассмотрим частицы, которые движутся прямолинейно вдоль оси X со скоростью v_x . Все частицы, которые пройдут через перпендикулярную площадку S_{\perp} за время Δt , окажутся в области, объём которой $V = S_{\perp} v_x \Delta t$.



Если концентрация частиц равна n , то количество частиц, попавших в этот объём равно $N = nV = nS_{\perp}v_x\Delta t$. Величина плотности потока частиц вдоль оси X определяется как $J_x = \frac{N}{S_{\perp}\Delta t} = nv_x$. Молекула может двигаться в любом из 6 направлений, но через площадку могут проходить только двигающиеся в одном, поэтому $\langle v_x \rangle = \frac{1}{6}n\langle v \rangle$. По итогу получаем выражение для потока:

$$J = \frac{1}{6}n\langle v \rangle \quad (4.1)$$

Основное уравнение МКТ:

$$p = \frac{1}{3}m_0n\langle v^2 \rangle \quad (4.2)$$

Выражаем одно через другое:

$$J = \frac{p}{2m_0\langle v \rangle} = \frac{\Delta N}{S\Delta t} \quad (4.3)$$

Среднюю скорость молекул газа можно оценить как $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. За время Δt из ракеты вылетает Δn молекул газа. Так как пробойна очень маленькая, процесс происходит квазистатически и давление паров внутри корабля всегда остаётся равным давлению насыщенных паров. Температура в процессе также не меняется. Найдём массу воды, вылетающую за единицу времени:

$$\Delta m = m_0\Delta N = \frac{pS}{2\langle v \rangle}\Delta t = pS\sqrt{\frac{\mu}{12RT}}\Delta t \quad (4.4)$$

И по итогу вся вода испарится за:

$$t = \frac{m}{pS}\sqrt{\frac{12RT}{\mu}} \approx 151\text{ч} \quad (4.5)$$

Ответ можешь немного отличаться из-за оценочного характера задачи.

Содержание	Баллы
Использована “хорошая” модель	2
Основные уравнения записаны правильно	4
Получен правильный буквенный ответ	4
Получен близкий к решению численный ответ	2

Задача 5: Токи в тетраэдре (*Егор Кузнецов*)

А. Для поиска распределения токов по тетраэдру, можно мысленно развернуть тетраэдр в прямоугольную пластину со сторонами $2a$ и $\sqrt{3}a/2$ и толщиной δ . Ввиду симметрии плотность тока на всей поверхности постоянна и равна:

$$j = \frac{I}{2a\delta}.$$

Для центров граней дифференциальный закон Ома выглядит одинаково:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Из последнего равенства получаем величины напряжённости электростатического поля в центрах граней тетраэдра:

$$E = \frac{I}{2a\delta\sigma}$$

В центрах граней ABC и ABD вектора напряжённости электростатического поля лежат в плоскостях соответствующих граней и направлены перпендикулярно от проволочки AB . Для оставшихся граней все аналогично, но напряжённости электростатического поля направлены перпендикулярно к проволочке CD .

Индукция магнитного поля создаваемая подводными проводами и током текущим по проволочкам равна 0 из закона Био-Савара-Лапласа. Ввиду симметрии тетраэдра можно показать, что токи с поверхности тетраэдра создают нулевую индукцию магнитного поля в центре тетраэдра, например, используя тот же закон Био-Савара-Лапласа, рассматривая небольшие симметрично расположенные кусочки поверхности тетраэдра.

В. Так как проволочки имеют пренебрежимо малое сопротивление по сравнению с поверхностью тетраэдров, то весь ток будет течь исключительно по граням тетраэдра. Ввиду симметрии цепи на проволочках AB и CD ток растекается от центра пополам и к центру соответственно, а по оставшимся рёбра протекает ток $I/4$. Индукция магнитного поля создаваемая подводными проводами и током текущим по проволочкам равна 0 из закона Био-Савара-Лапласа. Индукция магнитного поля создаваемая ребром AC в центре тетраэдра направлена перпендикулярна ему же, а так как противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны, то величину этого поля можно записать в таком виде:

$$\mathbf{B}_{AC} = k \cdot \mathbf{DB},$$

где k – некий коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии системы. Аналогично поступаем и для оставшихся рёбер, с учётом того, что для всех рёбер k одинаков, из-за центральной симметрии системы. Получаем вектор индукции магнитного поля в центре тетраэдра:

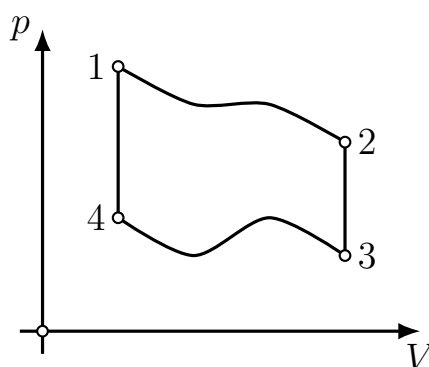
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{AC} + \mathbf{B}_{AD} + \mathbf{B}_{BD} + \mathbf{B}_{BC} = k (\mathbf{DB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} + \mathbf{AD}).$$

Сложив все вектора получим, что индукция магнитного поля в центре тетраэдра останется прежней и равной нулю.

Содержание	Баллы
Предложена развёртка тетраэдра или другой реализуемый способ для определения распределения плотности тока в тетраэдре.	2
Правильно найдено распределения плотности тока в тетраэдре.	2
Правильно записан дифференциальный закон Ома в центрах граней тетраэдра.	1
Правильно найдены величины и направления векторов напряжённости электростатических полей в центрах граней тетраэдра.	2
Верно показано, что индукция магнитного поля в центре тетраэдра равна 0.	1
Указано, что все токи будут течь по проволочкам.	1
Определено распределение токов по проволочкам.	1
Предложен реализуемый способ расчёта индукции магнитного поля в центре тетраэдра.	1
Получен верный ответ на пункт В.	1

Задача 6: Цикл кого? (Егор Кузнецов)

Построим циклический процесс по данным из условия задачи, как показано на рисунке ниже:



В процессах 2-3 и 4-1 работа не совершается, так это изохорические процессы. Тогда работа газа в процессе может быть вычислена, как площадь внутри циклического процесса на pV диаграмме:

$$A = A_{12} + A_{34},$$

где A_{12} – работа газа в процессе 1-2 (больше нуля), а A_{34} – работа в процессе 3-4 (меньше нуля).

Запишем первое начало термодинамики для процессов 1-2 и 3-4 соответственно, с учётом того, что это политропические процессы, то есть протекают при постоянной теплоёмкости:

$$\nu C (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + A_{12},$$

$$\nu C (T_4 - T_3) = \frac{3}{2} \nu R (T_4 - T_3) + A_{34},$$

где T_2 и T_4 – температуры газа в состояниях 2 и 4 соответственно. Выразим из двух последних уравнений работу газа за весь цикл:

$$A = \nu \left(\frac{3}{2} R - C \right) (T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

Рассмотрим бесконечно малый политропический процесс, запишем для него первое начало термодинамики и продифференцированное уравнение состояния соответственно:

$$\nu C dT = \nu C_V dT + p dV, \quad p dV + V dp = \nu R dT.$$

Исключая функции переменной T , получаем уравнение:

$$(C - C_V) V dp + (C - C_V - R) p dV = 0,$$

применяя соотношение Майера: $C_p = C_V + R$ – и интегрируя последнее уравнение, имеем:

$$\ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + \left(\frac{C - C_p}{C - C_V} \right) \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = 0.$$

Преобразуя последнее равенство, получаем, что политропический процесс описывается таким уравнением:

$$pV^n = \text{const},$$

где n – показатель политропы. Он зависит от теплоёмкости таким образом:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V},$$

где C_p – теплоёмкость газа в изобарном процессе, а C_V – теплоёмкость газа в изохорическом процессе. Используя уравнение состояния идеального газа: $pV = \nu RT$ – можем переписать уравнение политропы в следующем виде:

$$TV^{(n-1)} = \text{const}.$$

Так как в процессах 1-2 и 3-4 одинаковые теплоёмкости, то и n у них одинаковый, а тогда, используя последнее равенство для каждого из процессов, получим два уравнения:

$$T_1 V_1^{(n-1)} = T_2 V_2^{(n-1)}, \quad T_4 V_1^{(n-1)} = T_3 V_2^{(n-1)},$$

разделив эти уравнения друг на друга, выражаем T_4 через остальные температуры:

$$T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2}.$$

Подставим последнее равенство в выражение для работы за весь цикл и максимизируем работу, используя неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом и обратимость цикла в зависимости от знака теплоёмкости в политропических процессах:

$$\nu \left(\frac{3}{2}R - C \right) \left(T_1 + T_3 - \left(T_2 + \frac{T_1 T_3}{T_2} \right) \right) \leq \nu \left| \frac{3}{2}R - C \right| \left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3} \right)^2$$

Вместо неравенства Коши можно использовать производную для максимизации множителя с температурами:

$$T_2 \left(T_2 + \frac{T_1 T_3}{T_2} \right) = 0,$$

$$T_2^{(A_{\max})} = \sqrt{T_1 T_3}.$$

Окончательно получаем значение максимальной работы, которую может совершить газ за весь цикл:

$$A_{\max} = \nu \left| \frac{3}{2}R - C \right| \left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3} \right)^2$$

Содержание	Баллы
Правильно выражена работа за цикл через работы в процессах 1-2 и 3-4.	1
Правильно записано первое начало термодинамики для процессов 1-2 и 3-4 (за каждое по 1 баллу).	2
Правильно выражена работа за цикл через параметры ν , C , R , T_1 , T_2 , T_3 и T_4 .	1
Правильно записано уравнение политропы для процессов 1-2 и 3-4.	3
Получено правильное соотношение между температурами T_1 , T_2 , T_3 и T_4 .	1
Правильно максимизирована работа за цикл.	3
Получен верный ответ.	1

Задача 7: Атом Калия (Амир Пшенбаев)

Рассмотрим силы, действующие на электрон. Так как внешний электрон движется вокруг ядра по круговой орбите, а состояние является высоковозбужденным, можно пренебречь квантовыми эффектами и использовать классическое приближение. С учетом полного экранирования заряда ядра внутренними электронами, эффективный заряд атома равен $+e$. Следовательно, на электрон действует кулоновская

сила, равная

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}, \quad (7.1)$$

где r — расстояние между центром атома и внешним электроном. Эта сила уравновешена центробежной силой

$$F_c = \frac{mv^2}{r}. \quad (7.2)$$

Момент импульса электрона можно выразить как

$$L_n = mvr = n\hbar, \quad (7.3)$$

а скорость электрона найти как

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (7.4)$$

где T — период обращения электрона. Используя график, можно оценить, что данный период приблизительно равен

$$T \approx 4.7 \text{ пс}. \quad (7.5)$$

Найдем теперь r , приравняв (7.1) и (7.2) с учетом (7.4):

$$r = \left(\frac{ke^2}{m} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \right)^{1/3}. \quad (7.6)$$

Объединяя (7.3), (7.4) и (7.6), получаем:

$$n = \frac{m}{\hbar} \left(\frac{ke^2}{m} \right)^{2/3} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1/3} \approx 31.4. \quad (7.7)$$

Округляя результат до целого числа, получаем, что

$$n = 32. \quad (7.8)$$

Содержание	Баллы
Учтено что эффективный заряд атома равен $+e$	2
Правильно записана кулоновская сила	2
Правильно записана центробежная сила	2
Найдена приближительная оценка периода в диапазоне $[4.5, 4.9]$ пс.	2
Использовано равенство сил	1
Получен верный ответ для квантового числа в диапазоне $[30, 32]$	3

Первый тур. Младшая лига

Задача 8: Морской Бой (*Даниэль Тюлюбаев, Роман Черемнов*)

Побеждает тот, у кого осталось больше кораблей.

Задача 9: Заряженный маятник (*Егор Кузнецов*)

Период колебаний обыкновенного математического маятника в поле тяжести земли g для грузика на стержне длиной L можно найти по следующей формуле:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{9.1}$$

Теперь рассмотрим заряженный маятник в поле, направленном вертикально вверх. Сила реакции шарнира стала равна нулю, тогда. λ - линейная плотность заряда, m - масса грузика

$$\lambda LE = mg \tag{9.2}$$

Теперь поле направлено вниз. Момент инерции относительно точки подвеса $I = mL^2$. Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса для математического маятника, который отклонили на малый угол θ от положения равновесия:

$$I\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta - \int_0^L l \sin \theta \cdot E (\lambda dl) \tag{9.3}$$

$$mL^2\ddot{\theta} + \left(mg + \frac{\lambda LE}{2} \right) L \sin \theta = 0 \tag{9.4}$$

Используем приближение $\sin \theta \approx \theta$ и подставим сюда уравнение 9.2. Получим:

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0 \tag{9.5}$$

Отсюда

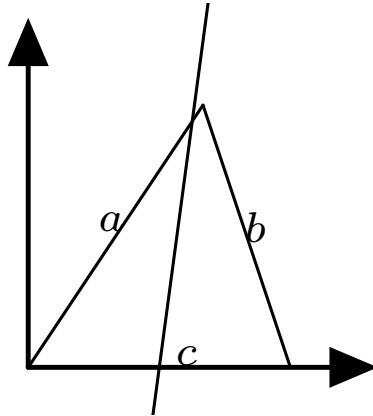
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \tag{9.6}$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}T_0 \tag{9.7}$$

Содержание	Баллы
Правильно записан период колебаний математического маятника T_0	1
Правильно записано условие равновесия груза и стержня в электрическом поле	2.5

Правильно определён момент инерции системы	1
Правильно записано уравнение моментов относительно шарнира	4
Правильно найдено уравнение гармонических колебаний	2.5
Получен верный ответ	1

Задача 10: одержимость. (Роман Черемнов)



Используем метод координат. Направим ось x вдоль стороны c , так что координаты левой точки $(0, 0)$, координаты правой $(x_3, 0)$, координаты той, что посередине (x_2, y_2) . Пусть стороны треугольника это a , b и c . Чтобы найти центр масс треугольника нужно найти координаты центров сторон, то есть центры масс каждой стороны по отдельности. Центр масс этих 3 точек найдётся как

$$\begin{cases} x_c = \frac{a \cdot \frac{x_2}{2} + b \cdot \frac{x_2+x_3}{2} + c \cdot \frac{x_3}{2}}{a + b + c} \\ y_c = \frac{a \cdot \frac{y_2}{2} + b \cdot \frac{y_2}{2}}{a + b + c} \end{cases} \quad (10.1)$$

Запишем уравнение прямой a

$$y = \frac{y_2}{x_2} x \quad (10.2)$$

Теперь запишем уравнение прямой проходящей через центр стороны c и центр масс треугольника

$$y = \frac{y_c}{x_c - \frac{x_3}{2}} \left(x - \frac{x_3}{2} \right) \quad (10.3)$$

Приравняем их и найдём координаты точек пересечения

$$\frac{y_2}{x_2} x = \frac{y_2 \frac{a+b}{2}}{a + b + c} \cdot \frac{a + b + c}{x_2 \cdot \frac{a+b}{2} - x_3 \cdot \frac{a}{2}} \left(x - \frac{x_3}{2} \right) \quad (10.4)$$

После упрощения

$$\frac{x}{x_2} = \frac{a+b}{x_2(a+b) - x_3 a} \left(x - \frac{x_3}{2}\right) \quad (10.5)$$

$$\frac{x_3}{2}(a+b) = \frac{a}{2} x \frac{x_3}{x_2} \quad (10.6)$$

$$x = \frac{a+b}{2a} x_2 \quad (10.7)$$

ВОО $a > b$

Теперь надём длины сторон от a отсекается

$$l'_1 = a \cdot \frac{a+b}{2a} = \frac{a+b}{2} \quad (10.8)$$

Тогда кусок периметра слева это

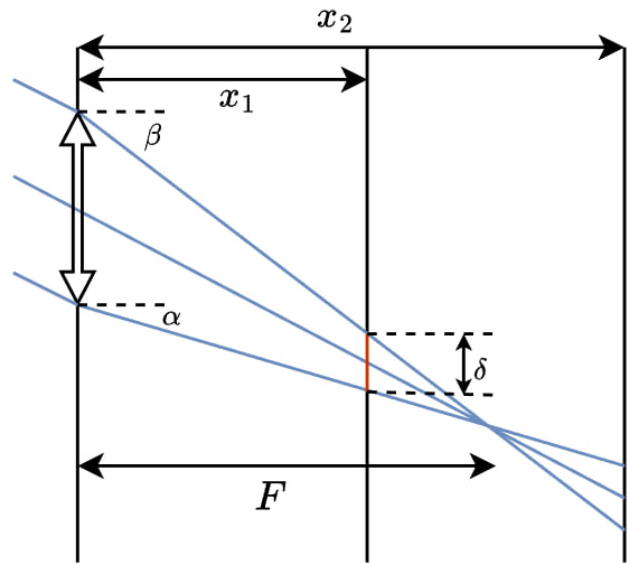
$$l_1 = \frac{a+b+c}{2} = \frac{P}{2} \quad (10.9)$$

Очевидно, что справа останется тоже половина периметра. А вы мне не верили! Очевидно, что сопротивление одинаковое и гореть они будут с равной интенсивностью. Так как мы полагали, что прямая проходит через центр масс, то эта точка, которую угадал Тимур, действительно центр масс

Содержание	Баллы
Попытка найти центр масс, учитывая, что он не находится в пересечении медиан	3
Нахождение точки пересечения	2
Нахождение сторон	3
Результат, что действительно был центр масс так как та прямая делит на две фигуры с равными периметрами	4

Задача 11: Линза в стене (Елубай Бекасыл)

Сперва нарисуем линзу и лучи проходящие через него. Нарисуем три луча, проходящих через центр, верхний край и нижний край линзы. Все три указанных луча пересекаются на фокусном расстоянии. Так как лучи прямые, расстояние между ними убывает или увеличивается пропорционально расстоянию от экрана. Следовательно, фокусное расстояние находится ровно по середине между двумя положениями экрана, при которых получают одинаковые изображения.



$$F = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{11.1}$$

Обозначим углы между крайними лучами и горизонтальной линией α и β . Расстояние между этими лучами на экране и есть диаметр пятна. Отметим их вертикальное смещение от начала верхушки линзы y_1, y_2 . Тогда можем написать:

$$\delta = y_1 - y_2 = D + x_1 \tan \alpha - x_1 \tan \beta \tag{11.2}$$

Для нахождения разницы тангенсов, воспользуемся условием того, что лучи пересекаются на фокусном расстоянии.

$$D + F \tan \alpha = F \tan \beta \rightarrow \tan \beta - \tan \alpha = \frac{D}{F} \tag{11.3}$$

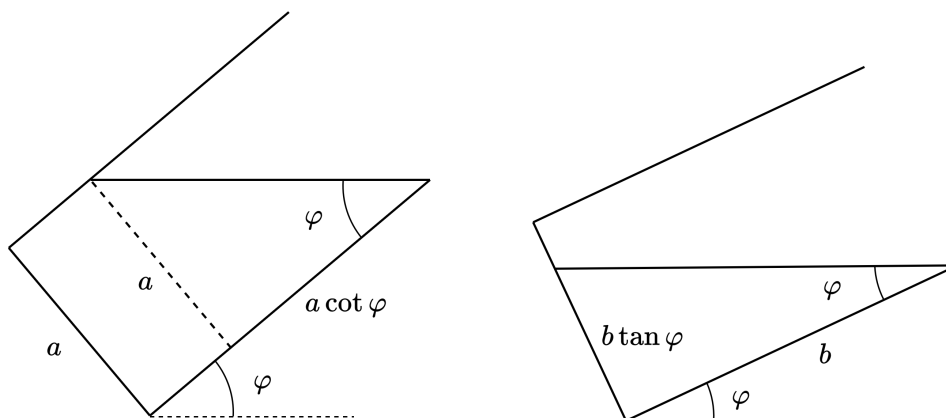
Подставляя в уравнение (??) значение разницы тангенсов из (??) и фокусного расстояния из (??) приходим к искомому ответу:

$$\delta = D - x_1 \frac{D}{f} = D \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = 1 \text{ см} \tag{11.4}$$

Содержание	Баллы
Находит фокусное расстояние	3
Записывает условие пересечения луче в фокусном расстоянии	3
Выражает диаметр пятна через заданные величины (подразумевается окончательный ответ)	5
Численное значение радиуса	1

Задача 12: Рубрика эксперименты! (Дамир Курман)

Наклоним бутылку до момента, когда вода будет прямо на ее краю (почти выливаться). Измерим угол, на который в этот момент наклонена бутылка, по отношению к горизонту и обозначим его φ . У нас есть два возможных случая, изображенных на рисунках.



В первом случае (используя формулы объема параллелепипеда и треугольной призмы)

$$V = a^2(b - a \cot \varphi) + \frac{1}{2}a^3 \cot \varphi \tag{12.1}$$

$$V = a^2b - \frac{1}{2}a^3 \cot \varphi \tag{12.2}$$

Во втором случае

$$V = \frac{b \cdot b \tan \varphi}{2} \cdot a = \frac{1}{2}ab^2 \tan \varphi \tag{12.3}$$

Содержание	Баллы
Идея наклонить бутылку до предела	4
Рассмотрено оба случая	4
Идея вычисления объема (геометрическая часть)	2
Получен правильный ответ	2

Внимание! Любой обоснованный метод оценивается. Во всех ситуациях, которые не учтены в марк-схеме, баллы выставляются по усмотрению жюри. Если участник решил правильно для одного случая, то он получает 8 баллов — баллы снимаются только за второй пункт. Если участник использует в своем методе несколько измерений, то баллы снижаются: два измерения — сумма баллов за всю задачу делится на два, три измерения — сумма баллов делится на 4, и т.д.

Задача 13: Космическое трение (*Илья Дрожжин*)

Трение небольшое, поэтому можно считать, что в каждый момент времени спутник движется по круговой орбите, которая постепенно уменьшается. Гравитационная и кинетическая энергии спутника:

$$U = -\frac{GMm}{r} \tag{13.1}$$

$$K = \frac{mv^2}{2} \tag{13.2}$$

Записав формулу для первой космической скорости спутника получим:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Leftrightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2r} \Leftrightarrow K = -\frac{U}{2} \tag{13.3}$$

Также этот результат можно сразу получить, вспомнив теорему о Вириале. Запишем закон сохранения энергии:

$$W = K + U = K - 2K = -K \tag{13.4}$$

Трение уменьшает общую энергию на 1 Дж

$$\Delta K = -\Delta W = A_{\text{тр}} = 1 \text{ Дж} \tag{13.5}$$

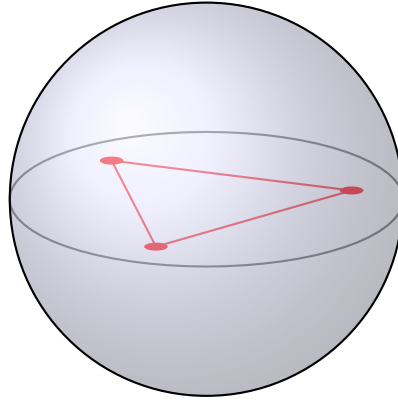
Таким образом кинетическая энергия спутника увеличивается на 1 Дж

Содержание	Баллы
Записывает выражения для кинетической и потенциальной энергии	4
Выводит уравнение эквивалентное $K = -\frac{U}{2}$	4
Правильный конечный ответ	4

Задача 14: Карикатура на Атом Лития (*Санжар Бисенали*)

Для начала нужно подумать о том, как могут располагаться три протона внутри электронной сферы. Во-первых, всегда через координаты трех протонов можно провести плоскость, и тогда встает вопрос как эта плоскость должна пересекать сферу. Ответ в том, что плоскость должна проходить через центр сферы, то есть делить ее на две равные полусферы. Это должно быть правдой потому что, если предположить, что плоскость проходит "выше" центра сферы, то верхняя часть сферы будет иметь меньше отрицательного заряда чем нижняя; в таких условиях равновесие не может установиться, т.к. положительные заряды будут ускоряться в нижнюю часть сферы.

И так, три протона должны находиться на плоскости экватора сферы, но какое именно расположение? Из-за симметрии системы, они должны формировать равносторонний треугольник, центр которого является центром сферы. В общем, рисунок можно представить следующим образом.



Сначала рассчитаем силу, которую испытывает $+q$ из-за двух других положительных зарядов. Предположим, что сторона треугольника имеет длину d . Сила будет направлено радиально наружу от центра с величиной

$$F_1 = \frac{kq^2}{d^2} \cdot \sin(60) \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}kq^2}{d^2} \quad (14.1)$$

В то же время каждый заряд испытывает притяжение к центру сферы. Это можно увидеть следующим образом. Если нарисовать круг (радиусом r_0) вокруг равностороннего треугольника и дополнить ее в сферу (так же с радиусом r_0), то отрицательные заряды между r_0 и a не будут влиять на три заряда $+q$. Одновременно сферу r_0 можно представить как точечный заряд в центре с величиной $Q = (\frac{r_0}{a})^3 \cdot (-3q)$. Сила на каждый заряд от Q равняется

$$F_2 = \frac{kQq}{r_0^2} = \frac{-3kq^2r_0}{a^3} \quad (14.2)$$

Для равновесия нам требуется $F_1 + F_2 = 0$, поэтому имеем

$$F_1 + F_2 = \frac{\sqrt{3}kq^2}{d^2} - \frac{3kq^2r_0}{a^3} = 0 \quad (14.3)$$

$$\frac{\sqrt{3}kq^2}{d^2} = \frac{3kq^2r_0}{a^3} \quad (14.4)$$

Связь между d и r_0 можно установить с помощью теоремы косинусов, а именно $d^2 = r_0^2 + r_0^2 - 2r_0^2 \cos(120) = 3r_0^2$

$$\frac{\sqrt{3}}{3r_0^2} = \frac{3r_0}{a^3} \rightarrow 9r_0^3 = \sqrt{3}a^3 \rightarrow r_0^3 = \frac{\sqrt{3}a^3}{9} \quad (14.5)$$

$$r_0 = a \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9}} = a \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.577a \quad (14.6)$$

Содержание	Баллы
Правильное расположение трех протонов	3
Рассчитывает силу F_1	1.5
Аргумент про точечный заряд Q	2.5
Рассчитывает силу F_2	2.5
Использует условие о равновесии	1.5
Находит выражение для r_0	1

Второй тур. Старшая лига

Задача 15: Капитанская задача (*Илья Дрожжин*)

Для победы достаточно сказать, что лист бумаги нельзя сложить более семи раз. Но если об этом сказано не было, то побеждает тот капитан, чей ответ ближе к 56.

Такой ответ получается, если предположить, что лист всё-же можно сложить более семи раз. Капитаны должны сами оценить среднее расстояние от Земли до Плутона и толщину бумаги. Мы возьмем значения $D = 6 \cdot 10^9$ км и $t_0 = 0.1$ мм, соответственно.

При каждом складывании листа пополам его толщина t_n удваивается.

$$t_n = t_0 \cdot 2^n \quad (15.1)$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, эта толщина должна быть больше D :

$$t_0 \cdot 2^n \geq D \quad (15.2)$$

$$n \geq \log_2 \left(\frac{D}{t_0} \right) \approx 55.7 \quad (15.3)$$

Так как мы считаем количество складываний, это число должно быть целым, поэтому округляем в большую сторону и получаем ответ $n \geq 56$

Задача 16: Пуля винтового ружья (*Кайнар Сүраган*)

Из-за винтовой резьбы в стволе пуля совершает один полный оборот (угол 2π радиан), пройдя при этом расстояние, равное ходу резьбы L . Из этого можем записать два следующих уравнения:

$$vT = L \quad (16.1)$$

$$\omega T = 2\pi \quad (16.2)$$

Объединяя эти два уравнения получаем связь между скоростью и угловой скоростью:

$$v = \omega \frac{L}{2\pi} \quad (16.3)$$

Теперь, запишем по отдельности энергию для поступательного и вращательного движения, где введена величина $\eta = 0.3$:

$$W_r = W_k \eta = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \tag{16.4}$$

$$W_t = W_k (1 - \eta) = \frac{1}{2} m v^2 \tag{16.5}$$

Свяжем последние два уравнения:

$$W_k = \frac{W_t}{1 - \eta} = \frac{W_r}{\eta} \rightarrow \frac{r^2 \omega^2}{\eta} = \frac{v^2}{1 - \eta} \tag{16.6}$$

Подставляя связь между скоростью и угловой скоростью приходим к ответу:

$$r = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{\eta}{1 - \eta}} \approx 26.5 \text{ мм} \tag{16.7}$$

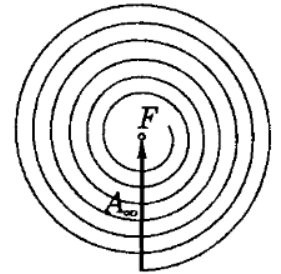
Содержание	Баллы
Записывает связь между скоростью и угловой скоростью	3
Записывает кинетическую энергию поступательного и вращательного движения (по 2 за каждое)	4
Выражение для радиуса инерции, r (окончательный ответ)	3.5
Численной значение радиуса инерции	1.5

Задача 17: Корабль Азамата (Дамир Курман)

Решение 1:

Для того чтобы рассчитать скорость можно воспользоваться идеей спирали Френеля, потому что время прохождения через каждую зону составляет $\tau = l/v_{\perp}$. Тогда модуль импульса будет:

$$A_o = E_N \tau q \tag{17.1}$$



Просуммировав через спираль у нас получится ответ $\frac{A_o}{2} = \frac{E_1 \tau}{2}$. Тогда скорость вычисляется по теореме Пифагора

$$V = \sqrt{v_{\perp}^2 + \frac{E_1^2 \tau^2 q}{4m^2}} \tag{17.2}$$

Для нахождения сдвига нужно записать сумму в виде:

$$d = \frac{a_1 \tau^2}{2} + a_1 \tau^2 - \frac{a_2 \tau^2}{2} + (a_1 - a_2) \tau^2 + \frac{a_3 \tau^2}{2} + (a_1 - a_2 + a_3) \tau^2 - \frac{a_4 \tau^2}{2} + \dots \tag{17.3}$$

Очевидно что эта сумма равна:

$$d = \frac{\tau^2}{2} (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots) + N \tau^2 (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots) + \tau^2 (a_2 - 2a_3 + 3a_4 - 4a_5 + \dots) \tag{17.4}$$

Последний член уравнение можно разложить на еще суммы, то есть $a_2 - 2a_3 + 3a_4 - 4a_5 + \dots = (a_2 - a_3 + a_4 - \dots) + (-a_3 + a_4 - a_5 + \dots) + (a_4 - a_5 + a_6 - \dots) + \dots = \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2} + \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + \dots = \frac{a_2}{4} \cdot \frac{a_2}{4} \approx \frac{a_1}{4} = \frac{E_1 q}{m} \left(\frac{l}{v_\perp}\right)^2 \frac{N}{2}$

После не сложных перестановок выходит

$$d = \frac{a_1 \tau^2}{2} (N + 1) \approx \frac{a_1 \tau^2}{2} N \tag{17.5}$$

Содержание	Баллы
Показывает что время прохождения зон одинаково	2
Показывает рисунок с векторным сложением скоростей	1
Доказывает что сумма векторов равна половине начального вектора	2
Находит конечную скорость	1
Записывает сумму для сдвига	1
Разделил сумму на несколько сум	2
Нашел конечный сдвиг параллельно полю	3

Решение 2:

Давайте разобьем все зоны на пары зон и рассмотрим сперва одну пару. Пронумируем все зоны от 1 до N и получается, у пары зон, которую мы взяли будут номера i и $i + 1$, где i является нечетным числом. Также для удобства введем переменную $k = (i + 1)/2$, который означает номер пары зон(первая пара, вторая пара и т.д.). Найдем сперва поле E_i и вектор скорости v_k при вхождении в зону для произвольного i и $i + 1$. Поле E меняется с шагом $\Delta E = E/(N - 1)$.

$$E_i = E \frac{N - i}{N - 1} \Rightarrow a_i = a_1 \frac{N - i}{N - 1} \tag{17.6}$$

Время прохождения каждой стороны равняется $t = l/v_\perp$ и данное время будет одинаковым для каждой пластинки, так как горизонтальная скорость не меняется. После прохождения через каждую пару зон скорость частицы будет меняться на следующую величину:

$$\Delta v_k = \frac{qt}{m} (E_i - E_{i+1}) = \frac{qt E_1}{m(N - 1)} \tag{17.7}$$

Как мы видим скорость меняется каждый раз на одинаковую величину. Отсюда, можно получить следующие выражения:

$$v_k = \frac{kqt E_1}{m(N - 1)} \tag{17.8}$$

Для нахождения скорости при выходе надо подставить $k = N/2$ и сложить векторно с перпендикулярной скоростью:

$$V = \sqrt{v_{\perp}^2 + \left(\frac{qtE_1N}{m2(N-1)}\right)^2} \approx \sqrt{v_{\perp}^2 + \left(\frac{qE_1l}{2mv_{\perp}}\right)^2} \quad (17.9)$$

После прохождения i зоны скорость частицы получить приращение a_it и будет равняться: $v_{i+1} = v_i + a_it$. Теперь напишем путь, которую пройдет частица во время прохождения i и $i + 1$ зон.

$$s_i = v_it + a_i \frac{t^2}{2}; \quad s_{i+1} = v_{i+1}t - a_{i+1} \frac{t^2}{2} \quad (17.10)$$

Просуммируем их и найдем путь при прохождении через k пару зон. После недолгих преобразований получаем:

$$s_k = \frac{qE_1}{m} t^2 \frac{2N-1}{2(N-1)} \approx \frac{qE_1}{m} t^2 \quad (17.11)$$

Замечаем, что перемещение через каждую пару всегда одинаково, то есть тело как будто движется равномерно. Вспоминая, что имеется $k = N/2$ пар, умножаем это на перемещение через пару зон:

$$d = s_k \frac{N}{2} = \frac{qE_1}{m} \left(\frac{l}{v_{\perp}}\right)^2 \frac{N}{2} \quad (17.12)$$

Содержание	Баллы
Находит поле для i зоны	0.5
Находит изменение скорости после прохождения пары зон и показывает, что данная величина постоянна	3
Находит скорость после прохождения поля	2.5
Находит вертикальное перемещение после прохождения пары зон и показывает, что данная величина постоянна	4
Нашел конечный сдвиг параллельно полю	2

Задача 18: В очень старом учебнике... (Амирбек Азатбеков)

Так как при $x < 0$ тока нет, нормальная компонента плотности тока на границе полупространства равна нулю.

Для того чтобы удовлетворить этому граничному условию, используем метод изображений. Если мы поместим изображение источника I в зеркальной точке $(-a, 0, 0)$, то из симметрии поле на плоскости $x = 0$ будет иметь только касательную составляющую, что удовлетворяет заданному условию.

Теперь мы рассматриваем задачу как бесконечное пространство, заполненное веществом ρ , с двумя источниками тока: реальным I в $(a, 0, 0)$ и мнимым I в $(-a, 0, 0)$. Потенциал точечного источника в безграничной среде равен

$$\phi_0(r) = \frac{\rho I}{4\pi r}$$

. Итоговый потенциал равен сумме потенциалов от обоих источников

$$\phi(x, y, z) = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где r_1 — расстояние до источника, а r_2 — до изображения. Поэтому

$$\phi(x, y, z) = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Содержание	Баллы
Нормальная составляющая тока на границе равна нулю	2
Изображение тока в $-a, 0, 0$	2
Значение тока $+I$	2
Потенциал от точечного источника $\frac{\rho I}{4\pi r}$	3
Конечный ответ	3

Задача 19: Граничные условия (*Адриан Ревковский*)

Суть задачи заключается в понимании используемых приближений:

Начнём со второго пункта, ибо он является классическим(квазистатическим) приближением: Так как всё теплоизолировано, процессы, которые происходят с газом, являются адиабатическими. Запишем уравнение Пуассона:

$$pV^\gamma = const \tag{19.1}$$

Для нахождения силы, действующей на тело при малом смещении, продифференцируем уравнение 19.1:

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

Заметив, что для параллелепипеда $V = L^2 * x$, и что аналогичные изменения давления происходят с двух сторон, получим уравнение колебаний:

$$Ma = -2\gamma P_0 L^2 \times \frac{x}{L} \rightarrow T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2 * 5/3 * P_0 L}} \tag{19.2}$$

В данном случае процесс уже не равновесный, и чтобы понять происходящее, стоит рассмотреть газ как набор частиц. Из-за того, что отношение масс частицы и поршня велико, каждое столкновение с поршнем заметно изменяет скорость частиц вдоль одной оси. А тот факт, что концентрация частиц мала, говорит о том, что столкновения между частицами происходят нечасто, а значит, энергия плохо рассеивается на остальные оси. Из этого следует, что газ деградирует до газа с одной степенью свободы. [важная мысль] В данном случае ответ будет отличаться только γ :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2 \cdot 3 \cdot P_0 L}} \tag{19.3}$$

И далее следует проверить, действительно ли в данной модели столкновения между частицами происходят намного реже. Длина свободного пробега $\lambda \propto \frac{1}{nr^2}$, где $n = \frac{N}{L^3}$ – концентрация, r – радиус молекулы. Значит, среднее время между столкновениями – $\tau = \frac{\lambda}{v}$. Условие применимости приближения: $\frac{\tau}{T} \gg N$:

$$\frac{\tau}{T} \propto \frac{1/nr^2v}{\sqrt{\frac{M}{P_0 L}}} \propto \frac{1}{nr^2 \sqrt{\frac{kT}{m}} \sqrt{\frac{M}{nkTL}}} = \sqrt{\frac{m}{NM}} * \frac{L^2}{r^2} \tag{19.4}$$

Откуда после элементарных преобразований:

$$\frac{m_0}{M} \gg \frac{V_0}{V} \tag{19.5}$$

Содержание	Баллы
Идея про квазистатическое приближение и приближение молекулами	1+1
Уравнение Пуассона	1
Дифференцирование с целью найти силу	1
Ответ	1
Рассуждение похожее на [важная мысль] из решения	2
Ответ	2
Идея для проверки(использование среднего времени и его правильное определение)	2
Показано, что приближение применимо	1

Задача 20: Опасная парабола (*Аргын Сейткамит*)

Для начала найдем уравнение параболы, ограничивающей зону поражения. Существует множество способов это сделать, предоставим один из них. Предположим, что парабола дается уравнением

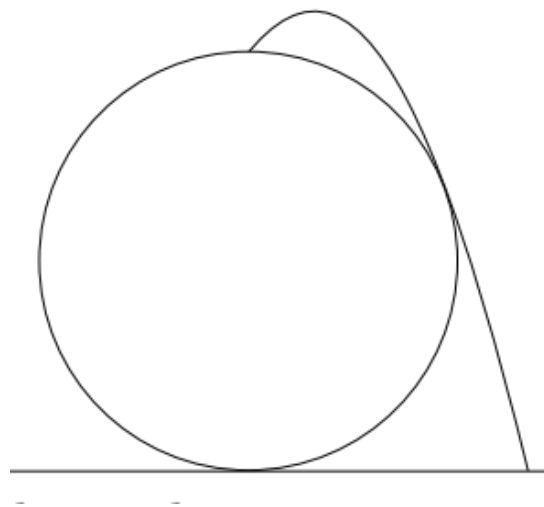
$$y = ax^2 + bx + c \tag{20.1}$$

с началом координат в точке выстрела. Из симметрии, очевидно, что $b = 0$. При вертикальном выстреле достигается высота $y_{vert} = \frac{v_0^2}{2g}$. С другой стороны, $y_{vert} = c$. Из кинематики известно, что максимальная дальность полета при фиксированной скорости равняется $L = \frac{v_0^2}{g}$. Подставляя $x = L$ и $y = 0$, получим $a \frac{v_0^4}{g^2} = -\frac{v_0^2}{2g}$. Окончательно:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \tag{20.2}$$

Данное уравнение называется уравнением параболы безопасности.

Проанализируем то, как будет выглядеть картина при оптимальной скорости выстрела. Так как траектория выстрела обратима, можно переформулировать вопрос: с какой минимальной скоростью должен выстрелить Илияс, чтобы попасть в Альтаира (Альтаир может находиться в любом месте на земле)? Траектория может: (1) касаться вершины; (2) пересечь вершину. В первом случае, вершина траектории будет совпадать с вершиной шара. Так как кривизна параболы максимальна в ее вершине, касаться шара в других точках она не будет. В данном случае, если бесконечно мало изменить угол выстрела, парабола по прежнему не будет касаться шара, а значит, можно будет уменьшить скорость. Отсюда следует, что (1) не соответствует оптимальной скорости. В случае (2), аналогичными размышлениями, приходим к выводу, что парабола должна касаться шара в какой-то точке, при этом пересекая вершину. Как будет выглядеть в этом случае парабола безопасности? Очевидно, она должна покрывать весь шар, иначе Илияс бы не смог попасть по земле. Предположим, что парабола безопасности не касается шара, и между ними есть пробел. Если уменьшить скорость выстрела, пробел уменьшится, а значит можно выбрать скорость оптимальнее предыдущей. Следовательно, она должна будет касаться шара в двух точках.



Теперь перейдем к решению. Взяв начало координат в месте, где находится Илияс,

запишем уравнения параболы безопасности и шара.

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (20.3)$$

$$(y + R)^2 + x^2 = R^2 \quad (20.4)$$

Приходим к следующему выражению:

$$\frac{g^2}{4v_0^4}x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)x^2 + \left(\frac{v_0^4}{4g^2} + \frac{v_0^2R}{g}\right) = 0 \quad (20.5)$$

Так как мы пришли к выводу, что парабола должна касаться шара, оптимальной скорости соответствует случай, когда данное уравнение имеет только 2 решения. Следовательно, дискриминант биквадратного уравнения должен быть равен нулю. Получим:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)^2 - 4\frac{g^2}{4v_0^4}\left(\frac{v_0^4}{4g^2} + \frac{v_0^2R}{g}\right) = 0 \quad (20.6)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{gR}{v_0^2} + \frac{g^2R^4}{v_0^4} = \frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2} \quad (20.7)$$

$$v_0^2 = \frac{gR}{2} \quad (20.8)$$

Не забываем про то, что мы взяли обратную траекторию струи. Тогда, из закона сохранения энергии, скорость струи в месте, где находится Альтаир:

$$\frac{v_{min}^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + 2gR \quad (20.9)$$

Окончательно:

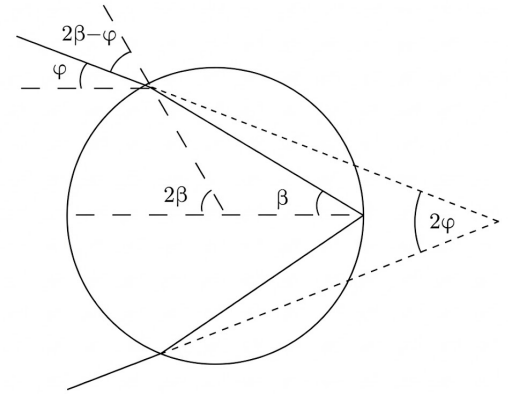
$$v_{min} = \sqrt{\frac{9gR}{2}} \quad (20.10)$$

Содержание	Баллы
Нашел коэффициенты в уравнении параболы безопасности	2
Идея о касании параболы в двух точках	3
Уравнение окружности и параболы	3
$D = 0$	1
ЗСЭ	1
Конечный ответ	2

Задача 21: Цветами Радуги (Амирбек Азатбеков)

Обозначим угол падения луча Солнца как α , угол преломления как β , а угловой радиус радуги как 2φ . Из соображений геометрии несложно заметить, что

$$\alpha = 2\beta - \varphi$$



Из закона Снелла $\sin \beta = (\sin \alpha)/n$, поэтому

$$\varphi = 2 \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) - \alpha$$

Радуга появляется там, где φ максимально, ведь это минимизирует рассеяние и дает максимальную яркость.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} - 1 = 0$$

Используя тождество $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$,

$$4 - 4 \sin^2 \alpha = n^2 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Подставляя $n = 1.33$, получаем $\alpha \approx 59.58^\circ$. Отсюда угловой радиус радуги $2\varphi \approx 42.5^\circ$

Содержание	Баллы
$\alpha = 2\beta - \varphi$ или эквивалент	4
Закон Снелла: $\sin \beta = (\sin \alpha)/n$	2
Идея об экстремуме 2φ	3
Конечный ответ $2\varphi \approx 42.5^\circ$	3

Второй тур. Младшая лига

Задача 22: Капитанская задача (*Илья Дрожжин*)

Для победы достаточно сказать, что лист бумаги нельзя сложить более семи раз. Но если об этом сказано не было, то побеждает тот капитан, чей ответ ближе к 56.

Такой ответ получается, если предположить, что лист всё-же можно сложить более семи раз. Капитаны должны сами оценить среднее расстояние от Земли до Плутона и толщину бумаги. Мы возьмем значения $D = 6 \cdot 10^9$ км и $t_0 = 0.1$ мм, соответственно.

При каждом складывании листа пополам его толщина t_n удваивается.

$$t_n = t_0 \cdot 2^n \quad (22.1)$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, эта толщина должна быть больше D :

$$t_0 \cdot 2^n \geq D \quad (22.2)$$

$$n \geq \log_2 \left(\frac{D}{t_0} \right) \approx 55.7 \quad (22.3)$$

Так как мы считаем количество складываний, это число должно быть целым, поэтому округляем в большую сторону и получаем ответ $n \geq 56$

Задача 23: Пуля винтового ружья (*Кайнар Сүраган*)

Из-за винтовой резьбы в стволе пуля совершает один полный оборот (угол 2π радиан), пройдя при этом расстояние, равное ходу резьбы L . Из этого можем записать два следующих уравнения:

$$vT = L \quad (23.1)$$

$$\omega T = 2\pi \quad (23.2)$$

Объединяя эти два уравнения получаем связь между скоростью и угловой скоростью:

$$v = \omega \frac{L}{2\pi} \quad (23.3)$$

Теперь, запишем по отдельности энергию для поступательного и вращательного движения, где введена величина $\eta = 0.3$:

$$W_r = W_k \eta = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \quad (23.4)$$

$$W_t = W_k (1 - \eta) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (23.5)$$

Свяжем последние два уравнения:

$$W_k = \frac{W_t}{1 - \eta} = \frac{W_r}{\eta} \rightarrow \frac{r^2 \omega^2}{\eta} = \frac{v^2}{1 - \eta} \quad (23.6)$$

Подставляя связь между скоростью и угловой скоростью приходим к ответу:

$$r = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{\eta}{1 - \eta}} \approx 26.5 \text{ мм} \quad (23.7)$$

Содержание	Баллы
Записывает связь между скоростью и угловой скоростью	3
Записывает кинетическую энергию поступательного и вращательного движения (по 2 за каждое)	4
Выражение для радиуса инерции, r (окончательный ответ)	3.5
Численной значение радиуса инерции	1.5

Задача 24: Второй элемент (*Даниэль Тюлюбаев*)

Обозначим $V_1 = 2 \text{ В}$, $V_2 = 5 \text{ В}$ и $I_2 = 2 \text{ А}$, согласно ВАХ элемента Y .

Напряжение в цепи равно сумме напряжений на его элементах. Ток в цепи и токи на элементах равны между собой.

$$V = V_X + V_Y \quad (24.1)$$

Когда напряжение начинает возрастать от нуля, все напряжение идет на элемент Y , а ток $I = 0$.

От значения $V_{\min} = V_1 = 2 \text{ В}$ ток начинает возрастать.

$$I_X = \alpha \sqrt{V_X} \Rightarrow V_X = \frac{I_X^2}{\alpha^2} \quad (24.2)$$

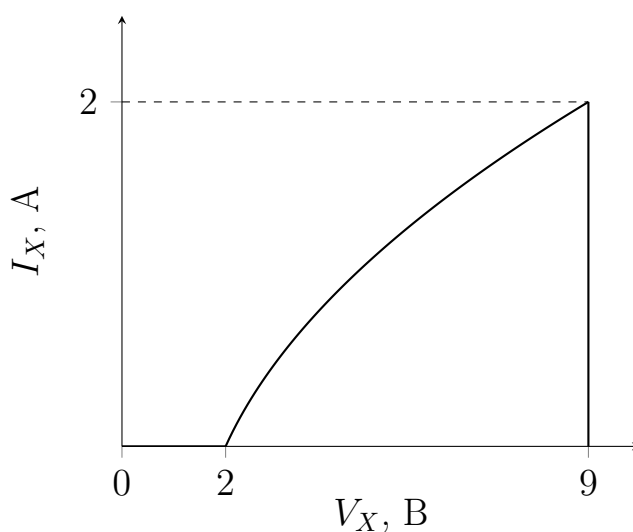
$$I_Y = \beta(V_Y - V_1) \Rightarrow V_Y = \frac{I_Y}{\beta} + V_1 \quad (24.3)$$

$$V = \frac{I^2}{\alpha^2} + \frac{I}{\beta} + V_1 \quad (24.4)$$

Так как после $I = I_2$ ток на элементе Y должен быть нулевым, ток в цепи при дальнейшем повышении напряжения перестает течь. Это происходит при напряжении V_{\max} :

$$V_{\max} = V(I_2) = \frac{I_2^2}{\alpha^2} + V_2 = 9 \text{ В} \quad (24.5)$$

В итоге имеем, что на участках $[0 \text{ В}, 2 \text{ В}]$ и $(9 \text{ В}, \infty)$ $I=0$. На участке $[2 \text{ В}, 9 \text{ В}]$ $V(I)$ описывается уравнением (24.4). Чтобы перевести $V(I)$ в $I(V)$ можно решить квадратное уравнение, начертить графики для обоих элементов и сложить их по V или нарисовать график $V(I)$ в системе координат, где ось Y - I , ось X - V , то есть “отзеркалить” параболу по линии $y = x$. В любом случае получится корневая функция (другими словами, часть параболы, лежащей горизонтально). График изображен на рисунке.



Содержание	Баллы
Понимает, что напряжение в цепи равно сумме напряжений на элементах	1
Понимает, что ток в цепи и токи на элементах равны	1
$I = 0$ до $V_{\min} = 2 \text{ В}$	2
Выводит формулу $V_X = \frac{I_X^2}{\alpha^2}$	1
Понимает, что $V(I)$ - парабола при $I \neq 0$	1
$I = 0$ с определенного V_{\max}	1
$V_{\max} = V(I_2)$	1.5
Находит численное значение $V_{\max} = 9\text{В}$	0.5
На участке $I > 0$ чертит часть корневой функции	2
Указывает на графике ключевые точки	1

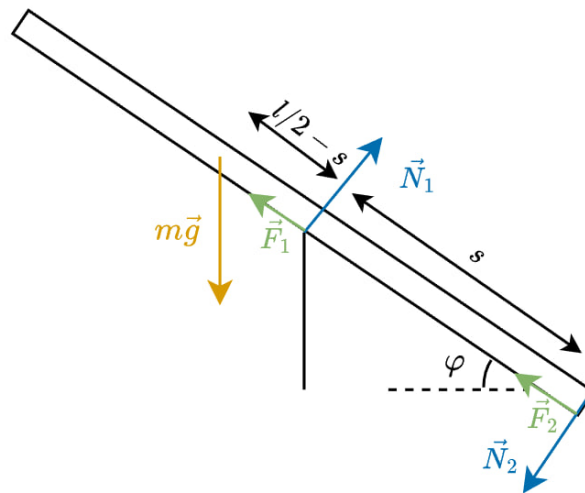
Примечание к пункту "На участке $I > 0$ чертит часть корневой функции": только ее положительная часть; ветвь направлена вправо; наклон уменьшается от конечного значения в точке V_{\min} (т.е. линия не идет вертикально); график $I(V)$, а не

$V(I)$. Если ранее участник ошибся в определении V_{\min} и/или V_{\max} или не определил V_{\max} , баллы за этот пункт засчитываются при условии соблюдения всех условий выше.

Примечание к пункту "Указывает на графике ключевые точки": засчитывается если есть хотя бы одна из них: V_{\min} , V_{\max} , I_2 . Если участник указал буквенное обозначение, ранее явно написав, чему оно равно численно, баллы засчитываются.

Задача 25: Равновесие карандаша (*Бекасыл Елубай*)

Для начала нарисуем систему, обозначив на ней все силы. Силы реакции в точках контакта обозначены N_1 , N_2 , а силы трения в данных местах F_1 , F_2 , соответственно. Расстояние между точками контакта обозначено как s . Угол между осью карандаша и горизонтом составляет угол φ .



Если сила тяжести направлена по правую сторону левой стойки, карандаш просто перевернется, так как в этом случае контакта с правой стойкой не будет и не будет, соответственно, момента силы, которая будет противодействовать повороту карандаша. Таким образом, центр тяжести карандаша должен находиться на расстоянии большем чем s . Выразим данное условие:

$$l_{cm} \geq s \rightarrow l \geq 2s = 2\sqrt{d^2 + h^2} \tag{25.1}$$

Теперь, найдем условие для коэффициента трения, предполагая, что предыдущее неравенство выполняется. Карандаш будет двигаться вдоль своей оси и не будет переворачиваться. Значит, можем записать условие равенства момента сила для двух точек контакта, что даст выражение для сил реакции.

$$M_1 = N_2s = mgd_{x1} = mg \left(\frac{l}{2} - s \right) \cos \varphi \tag{25.2}$$

$$M_2 = N_1 s = mgd_{x2} = mg \frac{l}{2} \cos \varphi \quad (25.3)$$

Силы трения в свою очередь равны произведению силы реакции на коэффициент трения.

$$F_1 = \mu N_1 = \mu mg \cos \varphi \frac{l-s}{s} \quad (25.4)$$

$$F_2 = \mu N_2 = \mu mg \cos \varphi \frac{l}{2s} \quad (25.5)$$

Распишем второй закон Ньютона вдоль оси карандаша, направив ось вниз. При максимальной силе трения сумма сил не должна быть положительным, чтобы тело могло покоиться.

$$\sum F = mg \sin \varphi - F_1 - F_2 = mg \sin \varphi - \mu mg \cos \varphi \frac{l-s}{s} \leq 0 \quad (25.6)$$

Выразим угол φ :

$$\tan \varphi = \frac{h}{D} \quad (25.7)$$

Преобразуя последнее неравенство используя предыдущее уравнение получаем условие для коэффициента трения:

$$\mu \geq \tan \varphi \frac{s}{l-s} = \frac{h}{D} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + D^2}}{l - \sqrt{h^2 + D^2}} \quad (25.8)$$

Содержание	Баллы
Находит условие для длины карандаша	2
Записал моменты сил относительно двух точек контакта (по 2 за каждое)	4
Находит силы трения (по 0.5 за каждую)	1
Записал 2 закон Ньютона вдоль оси карандаша	2
Выражение для тангенса угла через D, h	1
Конечное условие для коэффициента трения	2

Задача 26: Идеализм Артура (*Ильяс Казымбек*)

Когда Артур приобретает импульс около своих ног он приобретает поступательную скорость и вращательную вокруг своего центра масс. Если считать что после 4ех оборотов он обратно падает в вертикальном положении то время полета можно рассчитать как

$$t = \frac{2pcos(\alpha)}{mg} \quad (26.1)$$

где $g = 10\text{м/с}^2$.

В процессе нахождения Артура в воздухе он вращается с постоянной угловой скоростью ω

$$\omega = \frac{p \sin(\alpha) l}{2I} \quad (26.2)$$

Где I - это момент инерций Артура

$$I = ml^2/12 \quad (26.3)$$

Тогда время которое понадобится для 4ех идеальных оборотов

$$t' = \frac{8\pi}{\omega} = \frac{4\pi ml}{3p \sin(\alpha)} \quad (26.4)$$

Так как Артур должен приземлиться идеально сразу после 4ех оборотов, т.к. иначе он не сможет упасть идеально вертикально то

$$t = t' \quad (26.5)$$

$$\frac{2p \cos(\alpha)}{mg} = \frac{4\pi ml}{3p \sin(\alpha)} \quad (26.6)$$

Используя тригонометрическую формулу $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$

$$\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{4\pi m^2 l g}{3p^2}\right)}{2} \approx 34^\circ \quad (26.7)$$

Содержание	Баллы
Находит время полета t	2.5
Находит момент инерций Артура	1
Находит ω	2.5
Находит время t' через ω	1
приравнивает $t=t'$	1
Верная формула для α	2.5
Верная найдена α	1

Задача 27: Опасная парабола (*Аргын Сейткамит*)

Для начала найдем уравнение параболы, ограничивающей зону поражения. Существует множество способов это сделать, предоставим один из них. Предположим, что парабола дается уравнением

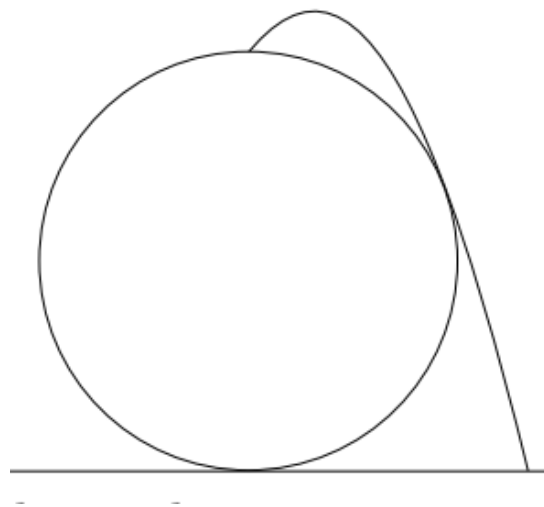
$$y = ax^2 + bx + c \quad (27.1)$$

с началом координат в точке выстрела. Из симметрии, очевидно, что $b = 0$. При вертикальном выстреле достигается высота $y_{vert} = \frac{v_0^2}{2g}$. С другой стороны, $y_{vert} = c$. Из кинематики известно, что максимальная дальность полета при фиксированной скорости равняется $L = \frac{v_0^2}{g}$. Подставляя $x = L$ и $y = 0$, получим $a \frac{v_0^4}{g^2} = -\frac{v_0^2}{2g}$. Окончательно:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \tag{27.2}$$

Данное уравнение называется уравнением параболы безопасности.

Проанализируем то, как будет выглядеть картина при оптимальной скорости выстрела. Так как траектория выстрела обратима, можно переформулировать вопрос: с какой минимальной скоростью должен выстрелить Илияс, чтобы попасть в Альтаира (Альтаир может находиться в любом месте на земле)? Траектория может: (1) касаться вершины; (2) пересечь вершину. В первом случае, вершина траектории будет совпадать с вершиной шара. Так как кривизна параболы максимальна в ее вершине, касаться шара в других точках она не будет. В данном случае, если бесконечно мало изменить угол выстрела, парабола по прежнему не будет касаться шара, а значит, можно будет уменьшить скорость. Отсюда следует, что (1) не соответствует оптимальной скорости. В случае (2), аналогичными размышлениями, приходим к выводу, что парабола должна касаться шара в какой-то точке, при этом пересекая вершину. Как будет выглядеть в этом случае парабола безопасности? Очевидно, она должна покрывать весь шар, иначе Илияс бы не смог попасть по земле. Предположим, что парабола безопасности не касается шара, и между ними есть пробел. Если уменьшить скорость выстрела, пробел уменьшится, а значит можно выбрать скорость оптимальнее предыдущей. Следовательно, она должна будет касаться шара в двух точках.



Теперь перейдем к решению. Взяв начало координат в месте, где находится Илияс,

запишем уравнения параболы безопасности и шара.

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (27.3)$$

$$(y + R)^2 + x^2 = R^2 \quad (27.4)$$

Приходим к следующему выражению:

$$\frac{g^2}{4v_0^4}x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)x^2 + \left(\frac{v_0^4}{4g^2} + \frac{v_0^2R}{g}\right) = 0 \quad (27.5)$$

Так как мы пришли к выводу, что парабола должна касаться шара, оптимальной скорости соответствует случай, когда данное уравнение имеет только 2 решения. Следовательно, дискриминант биквадратного уравнения должен быть равен нулю. Получим:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2}\right)^2 - 4\frac{g^2}{4v_0^4}\left(\frac{v_0^4}{4g^2} + \frac{v_0^2R}{g}\right) = 0 \quad (27.6)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{gR}{v_0^2} + \frac{g^2R^4}{v_0^4} = \frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2} \quad (27.7)$$

$$v_0^2 = \frac{gR}{2} \quad (27.8)$$

Не забываем про то, что мы взяли обратную траекторию струи. Тогда, из закона сохранения энергии, скорость струи в месте, где находится Альтаир:

$$\frac{v_{min}^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + 2gR \quad (27.9)$$

Окончательно:

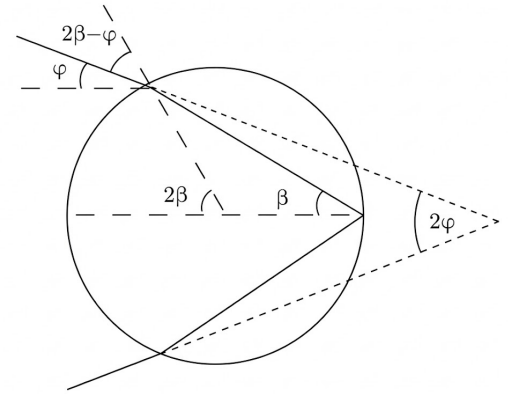
$$v_{min} = \sqrt{\frac{9gR}{2}} \quad (27.10)$$

Содержание	Баллы
Нашел коэффициенты в уравнении параболы безопасности	2
Идея о касании параболы в двух точках	3
Уравнение окружности и параболы	3
$D = 0$	1
ЗСЭ	1
Конечный ответ	2

Задача 28: Цветами Радуги (Амирбек Азатбеков)

Обозначим угол падения луча Солнца как α , угол преломления как β , а угловой радиус радуги как 2φ . Из соображений геометрии несложно заметить, что

$$\alpha = 2\beta - \varphi$$



Из закона Снелла $\sin \beta = (\sin \alpha)/n$, поэтому

$$\varphi = 2 \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) - \alpha$$

Радуга появляется там, где φ максимально, ведь это минимизирует рассеяние и дает максимальную яркость.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} - 1 = 0$$

Используя тождество $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$,

$$4 - 4 \sin^2 \alpha = n^2 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Подставляя $n = 1.33$, получаем $\alpha \approx 59.58^\circ$. Отсюда угловой радиус радуги $2\varphi \approx 42.5^\circ$

Содержание	Баллы
$\alpha = 2\beta - \varphi$ или эквивалент	4
Закон Снелла: $\sin \beta = (\sin \alpha)/n$	2
Идея об экстремуме 2φ	3
Конечный ответ $2\varphi \approx 42.5^\circ$	3

Третий тур. Старшая лига

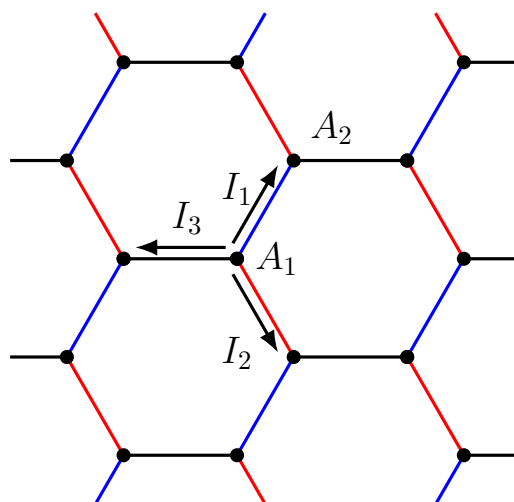
Задача 29: Капитанская задача (Бекасыл Елубай)

На картинке указана территория Португалии.

Задача 30: Пчелиные соты (Егор Кузнецов)

Пусть в узел A_1 втекает ток $I_1 + I_2 + I_3$, на синее ребро отекает I_1 , на красное I_2 и на чёрное I_3 , и весь ток симметрично растекается до бесконечности. Теперь рассмотрим обратный ход тока, только он уже собирается в узле A_2 . Воспользуемся методом наложения токов, тогда по ребру A_1A_2 протекает ток $2I_1$. Из закона Ома выражаем R_1 , также поступаем для пар точек $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$ и выражаем R_2 и R_3 соответственно:

$$R_1 = \frac{2I_1r_1}{I_1 + I_2 + I_3}, \quad R_2 = \frac{2I_2r_2}{I_1 + I_2 + I_3}, \quad R_3 = \frac{2I_3r_3}{I_1 + I_2 + I_3}.$$



Разделим каждое из последних уравнений на r_1 , r_2 и r_3 соответственно, сложим их и получим:

$$\frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} + \frac{R_3}{r_3} = 2.$$

Выражаем из последнего равенства R_3 и получаем ответ:

$$R_3 = \left(2 - \frac{R_1}{r_1} - \frac{R_2}{r_2} \right) r_3$$

Содержание	Баллы
Предложен метод наложения токов.	2
Правильно выражено R_1 через токи I_1, I_2, I_3 и r_1 .	2
Правильно выражено R_2 через токи I_1, I_2, I_3 и r_2 .	2

Правильно выражено R_3 через токи I_1, I_2, I_3 и r_3 .	2
Получен верный ответ.	4

Задача 31: йинежабрози дотеМ (Роман Черемнов) Задача предполагает использование метода инверсии для упрощения всех рассуждений. Интерпретация допускает множество различных случаев. В случае если оппонент указывает на это, оппонент должен получить до 6 баллов за задачу в зависимости от ответа докладчика. Есть случаи, рассмотрение которых математически сложно, рассмотрение таких случаев не требуется, но это должно быть оговорено при докладе, иначе если оппонент заметит это ему должно быть предоставлено до 2 баллов.

Содержание	Баллы
Полный разбор одного случая расположения кольца внутри сферы (возможны частичные баллы по усмотрению жюри)	12
Оппонент отметил, что рассмотрен только один случай	до -6

Задача 32: Падение (Егор Кузнецов)

Внимание: У задачи может быть 2 принципиально разных решения, здесь приведены решения и марксхемы для каждого подхода

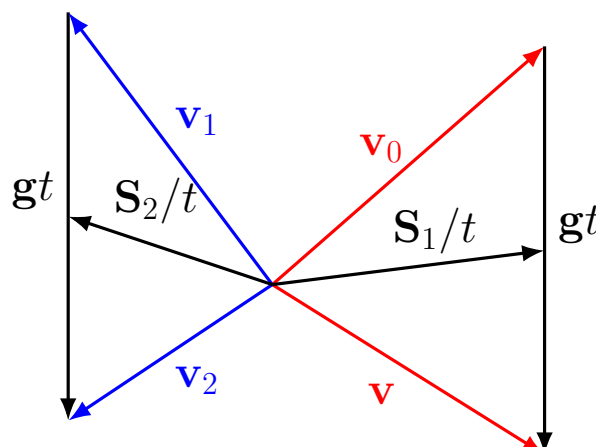
Решение 1

Запишем уравнения равноускоренного движения каждого из камней за время их разлёта t на расстояние S :

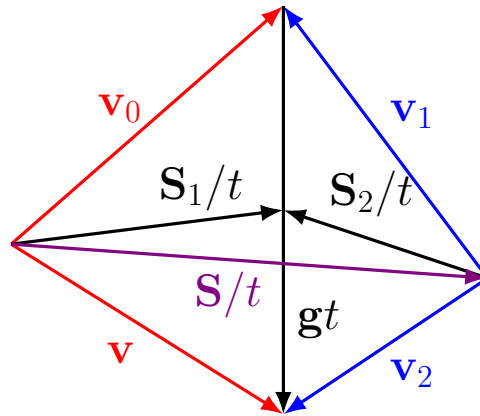
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{g}t,$$

$$S_1 = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}, \quad S_2 = \mathbf{v}_1 t + \frac{\mathbf{g}t^2}{2}.$$

Изобразим векторные треугольники скоростей, полученные из предыдущих уравнений:



Перенесём один из треугольников и соединим его со вторым так, чтобы стороны gt совпали, тогда получим такой четырёхугольник:



Заметим, что одна диагональ равна gt , а вторая равна:

$$\frac{S_1}{t} + \frac{(-S_2)}{t} = \frac{S}{t}.$$

Запишем неравенство Птолемея для векторного четырёхугольника:

$$\frac{S}{t} \cdot gt \leq v_0 \cdot v_2 + v \cdot v_1.$$

Сокращая время t в неравенстве Птолемея, находим минимальное значение скорости v_0 :

$$v_0^{\min} = \frac{gS - vv_1}{v_2}$$

Содержание	Баллы
Предложен метод векторных диаграмм.	1
Правильно нарисованы два векторных треугольника скоростей для каждого из камней.	2
Треугольники правильно объединены в четырёхугольник.	2
В четырёхугольнике правильно определён вектор S/t .	2
Правильно записано неравенство Птолемея для векторного четырёхугольника.	4
Получен верный ответ.	1

Решение 2

Способ решения этой задачи методом координат теоретически возможен, но вероятно никто из участников не сможет его реализовать, поскольку это очень сложно! Поэтому решения методом координат, в которых был получен верный ответ оцениваются полным баллом за задачу, в противном случае выставляется 0 баллов

за задачу, поскольку участники могут записать уравнения равноускоренного движения в проекциях на некоторые оси, сделать какие-то арифметические преобразования, а затем утверждать, что такое решение может привести к правильному ответу, но они его точно не смогут реализовать за время тура.

Содержание	Баллы
Получен верный ответ, используя метод координат.	12

Задача 33: Наивный Альтаир... (Роман Черемнов)

Рассмотрим дифференциальное кольцо атмосферы по которому распространяется луч. В нём выполняется

$$\frac{n - dn}{n} = \cos \theta \tag{33.1}$$

$$1 - \frac{dn}{n} = 1 - \frac{\theta^2}{2} \tag{33.2}$$

$$\theta^2 = \frac{2dn}{n} \tag{33.3}$$

также

$$\cos \theta = \frac{r}{r + dz} = 1 - \frac{dz}{R} \tag{33.4}$$

$$\theta^2 = \frac{2dz}{r} \tag{33.5}$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{dz}{r} \tag{33.6}$$

$$\frac{dn}{dz} = \frac{n}{r} \tag{33.7}$$

Теперь поработаем с атмосферой, запишем уравнение состояния газа

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \tag{33.8}$$

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{dz} = \frac{R}{M} \frac{dT}{dz} \tag{33.9}$$

Продифференцируем соотношение Гладстона-Дейла

$$(n - 1) \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{dn}{dz} = 0 \tag{33.10}$$

$$(n - 1) \frac{R}{pM} \frac{dT}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{dn}{dz} = 0 \tag{33.11}$$

$$(n - 1) \frac{R}{pM} \frac{dT}{dz} = - \frac{n}{\rho r} \quad (33.12)$$

$$\boxed{\frac{dT}{dz} = - \frac{n}{\rho r} \frac{pM}{R(n - 1)}} \quad (33.13)$$

Содержание	Баллы
Идея использовать дифференциальный слой атмосферы	4
Правильно расписаны дифференциальные соотношения (2 за каждое)	6
Получен ответ	2

Третий тур. Младшая лига

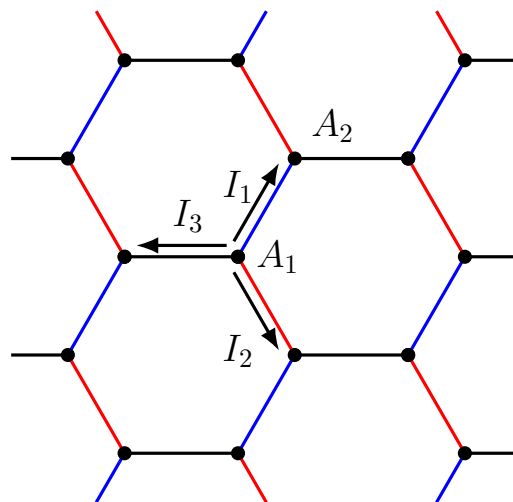
Задача 34: Капитанская задача (Бекасыл Елубай)

На картинке указана территория Португалии.

Задача 35: Пчелиные соты (Егор Кузнецов)

Пусть в узел A_1 втекает ток $I_1 + I_2 + I_3$, на синее ребро отекает I_1 , на красное I_2 и на чёрное I_3 , и весь ток симметрично растекается до бесконечности. Теперь рассмотрим обратный ход тока, только он уже собирается в узле A_2 . Воспользуемся методом наложения токов, тогда по ребру A_1A_2 протекает ток $2I_1$. Из закона Ома выражаем R_1 , также поступаем для пар точек $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$ и выражаем R_2 и R_3 соответственно:

$$R_1 = \frac{2I_1r_1}{I_1 + I_2 + I_3}, \quad R_2 = \frac{2I_2r_2}{I_1 + I_2 + I_3}, \quad R_3 = \frac{2I_3r_3}{I_1 + I_2 + I_3}.$$



Разделим каждое из последних уравнений на r_1 , r_2 и r_3 соответственно, сложим их и получим:

$$\frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} + \frac{R_3}{r_3} = 2.$$

Выражаем из последнего равенства R_3 и получаем ответ:

$$R_3 = \left(2 - \frac{R_1}{r_1} - \frac{R_2}{r_2} \right) r_3$$

Содержание	Баллы
Предложен метод наложения токов.	2
Правильно выражено R_1 через токи I_1, I_2, I_3 и r_1 .	2
Правильно выражено R_2 через токи I_1, I_2, I_3 и r_2 .	2

Правильно выражено R_3 через токи I_1, I_2, I_3 и r_3 .	2
Получен верный ответ.	4

Задача 36: А F-1 В (*Роман Черемнов, Егор Кузнецов*)

Используя подсказку, можно понять, что вовремя поворота скорость бусинки будет меняться в зависимости от угла. Тогда рассматривая каждый из поворотов как элемент окружности получим.

$$v = v_0 e^{-(\pi+\pi/2+\pi+\pi/2+\pi+\pi/2+\pi/2+\pi+\pi/2+\pi+\pi/2+\pi)} = v_0 e^{-9\pi/2} \quad (36.1)$$

Содержание	Баллы
Определено, что скорость зависит от угла	2
Полученная зависимость правильно экстраполирована для случая фрагмента окружности	4
Правильно учтены полуокружности	2
Правильно учтены уголки	2
Получен верный ответ.	2

Задача 37: Вращение лошади (*Ильяс Казымбек*)

Прежде всего определим условие балансирования человека на лошади при установившейся максимальной скорости и силу реакции, действующую на лошадь от человека. Для этого рассмотрим силы вдоль осей x и y :

$$x : N \sin(\varphi) = kR^2V^2, \quad (37.1)$$

$$y : mg = N \cos(\varphi). \quad (37.2)$$

Откуда:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{kR^2V^2}{mg} \right). \quad (37.3)$$

Найдем формулу для мощности. На мощность лошади влияет сила сопротивления воздуха и сила реакции от человека (сила трения не влияет, так как лошадь движется без проскальзывания и не совершает работы):

$$P = (N \sin(\varphi) + 4kV^2R^2) \cdot V. \quad (37.4)$$

Из уравнений (37.1), (37.3) и (37.4) получаем:

$$V = \left(\frac{P}{5kR^2} \right)^{1/3}, \quad (37.5)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\left(\frac{P}{5kR^2} \right)^{2/3} kR^2}{mg} \right). \quad (37.6)$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда лошадь ещё не достигла максимальной скорости. В этом случае суммарная сила равна произведению массы на ускорение. В данной части мощность удобнее выразить через работу за единицу времени:

$$dA = (M + m)v dv + \frac{2}{5}M4R^2\Omega d\Omega + 4kV^2R^2 dx + kV^2R^2 dx. \quad (37.7)$$

Здесь Ω — угловая скорость лошади. Выразим их через v :

$$\Omega = \frac{v}{R}, \quad (37.8)$$

$$(37.9)$$

Теперь выразим P из предыдущих уравнений:

$$P = \frac{dA}{dt} = (M + m)V_1 a + \frac{8}{5}(M)V_1 a + 5kV_1^3 R^2. \quad (37.10)$$

В итоге получаем:

$$a = \frac{P - 5kV_1^3 R^2}{\left(\frac{13}{5}M + m\right)V_1}. \quad (37.11)$$

Содержание	Баллы
Находим силы, действующие на человека	2
Выражение угла φ через скорость	1
Формула для мощности	1
Найдены формулы для φ и V	2
Идея выражения мощности через изменение энергии	0.5
Найдена формула для дифференциала энергии	2
Находит угловые скорости человека и лошади	0.5
Находит формулу мощности через ускорение и скорость	2

Находит ускорение лошади	1
--------------------------	---

Задача 38: Анаморфная пара призм (Санжар Бисенали)

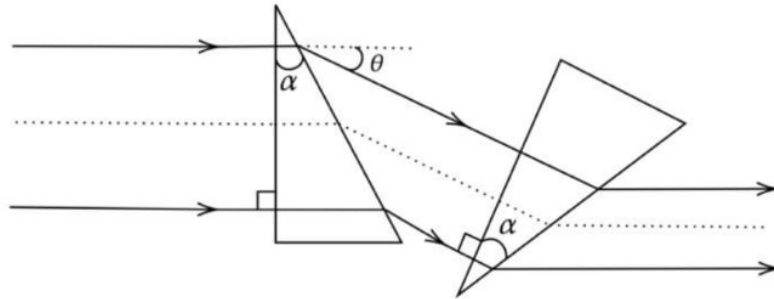


Рис. 1: Схема анаморфных пары призм

Может быть получена такая схема, она следует из того, что направление лучей не должно измениться

$$n \sin \alpha = \sin(\alpha + \theta) \tag{38.1}$$

$$d' = \frac{d}{\cos \alpha} \cos(\alpha + \theta) \tag{38.2}$$

Такое уменьшение происходит дважды, поэтому

$$d_f = d \left(\frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos \alpha} \right) \tag{38.3}$$

Содержание	Баллы
Получена правильная схема	4
Правильно построены лучи	2
Правильно посчитаны углы	3
Определён фактор через угол α	3

Четвертый тур. Старшая лига

Задача 39: Капитанская задача (*Бекасыл Елубай*)

Берліген сөздер келесі 4 санатқа бөлінеді:

1. Ақтөбе қаласындағы аудандар: 1, 2, 3, 4;
2. 12-ге еселі сандар: 12, 24, 36, 48;
3. Екі таңбалы жай сандар: 59, 23, 31, 89;
4. Ұйқаста қолданылатын сандар: 40, 99, 1045, 1800.

Задача 40: Губка Боб (*Роман Черемнов*)

Найдём коэффициент объёмного сжатия. Со всех сторон давление p Тогда уравнение деформации примет такой вид

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (40.1)$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (40.2)$$

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x) \quad (40.3)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \quad (40.4)$$

Суммируя всё и обозначая $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ Получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3p}{E}(1 - 2\mu) \quad (40.5)$$

Теперь очевидно как решать задачу

$$\rho_B g V' = mg \quad (40.6)$$

$$V' = \frac{m}{\rho} \quad (40.7)$$

$$p = \rho g h \quad (40.8)$$

$$\frac{m/\rho_B - a^3}{a^3} = -\frac{3\rho_B g h}{E}(1 - 2\mu) \quad (40.9)$$

$$h = \frac{E}{(1 - 2\mu)\rho_B g} \frac{a^3 - m/\rho}{a^3} \quad (40.10)$$

Содержание	Баллы
Найден коэффициент объемного сжатия любым способом	6
Записано условие равновесия	2
Найдено давление на глубине h	2
Получен ответ	2

Задача 41: ЮАА голд (Азамат Аймуратов)

Приливное ускорение на краях кометы, вызванное Юпитером:

$$a_{\text{прилив}} \approx \frac{2GMR}{d^3},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Юпитера, R — радиус кометы, d — расстояние от центра Юпитера.

Ускорение свободного падения на поверхности кометы:

$$a_{\text{грав}} = \frac{GM_c}{R^2},$$

где $M_c = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ — масса кометы.

Подставим:

$$a_{\text{грав}} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho R.$$

Комета распадается, когда:

$$a_{\text{прилив}} = a_{\text{грав}}.$$

Подставим:

$$\frac{2GMR}{d^3} = \frac{4}{3}\pi G \rho R.$$

Сократим G и R :

$$\frac{2M}{d^3} = \frac{4}{3}\pi \rho.$$

Выразим d^3 :

$$d^3 = \frac{3M}{2\pi\rho}, \quad \Rightarrow \quad d = \left(\frac{3M}{2\pi\rho}\right)^{1/3}.$$

$M = 1,90 \cdot 10^{27}$ кг, $\rho = 600$ кг/м³,

$$d^3 = \frac{3 \cdot 1,90 \cdot 10^{27}}{2\pi \cdot 600} \approx \frac{5,70 \cdot 10^{27}}{3769,91} \approx 1,513 \cdot 10^{24},$$

$$d \approx (1,513 \cdot 10^{24})^{1/3} \approx 1,15 \cdot 10^8 \text{ м.}$$

Радиус Юпитера $R_J \approx 7,1 \cdot 10^7$ м, следовательно:

$$d \approx 1,6 R_J.$$

$$d \approx 1,15 \cdot 10^8 \text{ м} \approx 1,6 R_J$$

Содержание	Баллы
Найдено приливное ускорение	3
Найдено гравитационное ускорение на поверхности	3
Найдено условие разрушение	3
Численный ответ	3

Задача 42: Домбрадость (Владимир Литвинов)

1. Нахождение α

Обозначим длину струны от верхнего до нижнего порожка как L . Если лад n находится на координате x_n , то длина свободной струны $l_n = L - x_n$. Соотношение частот соседних нот равно отношению обратных длин:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{l_n}{l_{n+1}} = \alpha$$

Следовательно:

$$\alpha = \frac{L - x_n}{L - x_{n+1}}$$

Выберем лады 0 и 1:

$$\alpha = \frac{L - 0}{L - 25.00} = \frac{L}{L - 25.00}$$

Для ладов 1 и 2:

$$\alpha = \frac{L - 25.00}{L - 43.75}$$

Приравняем:

$$\frac{L}{L - 25} = \frac{L - 25}{L - 43.75}$$

Решим относительно L :

$$L(L - 43.75) = (L - 25.00)^2 \implies L^2 - 43.75L = L^2 - 50.00 \cdot L + 625.00$$

$$-43.75 \cdot L = -50.00 \cdot L + 625.00 \implies 6.25 \cdot L = 625.00 \implies L \approx 100.00 \text{ см}$$

Теперь α :

$$\alpha = \frac{L}{L - 25.00} \approx \frac{100.00}{75.00} \approx 1.33 \approx \frac{4}{3}$$

2. Координата нижнего порожка

$$L \approx 100.00 \text{ см}$$

3. Нахождение кривого лада

Сверим теоретические координаты ладов, найденные при помощи L и α :

$$x_{3/} = L - \frac{L}{\alpha^2} \approx 100.00 - \frac{100.00}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \approx 57.81 \text{ см}$$

Дано $x_2 = 61.25$ см, значит, третий лад смещён. Для остальных же ладов рассчитанные значения совпадают с реальными

$$\boxed{N = 3}$$

Содержание	Баллы
Идея о том, что частота обратно пропорциональна длине	3
Правильный ответ	3
Правильный численный ответ	3
Определено что третий лад смещён	3

Задача 43: Магнитик на холодильнике (Илья Пластинин)

Воспользуемся аналогией с проводником:

Для проводника ($\epsilon = 0$) граничные условия:

$$\begin{cases} E_{\tau 1} = E_{\tau 2} \\ D_{n1} = D_{n2} \end{cases} \quad (43.1)$$

Для ферромагнетика ($1/\mu = 0$) граничные условия:

$$\begin{cases} H_{\tau 1} = H_{\tau 2} \\ B_{n1} = B_{n2} \end{cases} \quad (43.2)$$

Для проводников существует метод изображений, позволяющий находить конфигурацию, удовлетворяющую этим граничным условиям. Можно показать (что не является целью этой задачи), что аналогичный метод существует для магнетиков. Более того, однородно намагниченный шар эквивалентен магнитному диполю (опять-таки аналогия с электростатикой), с магнитным моментом $\vec{M} = V \cdot \vec{J}$

(место для рисунка с шариком сверху и зеркальным снизу)

Для начала, общие рассуждения о положении равновесия: рассмотрим формулу для энергии.

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 - 3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{n})(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{n})) = \frac{\mu_0 \mu_1^2}{4\pi r^3} (\cos 2\phi - 3 \cos \phi^2) = \frac{\mu_0 \mu_1^2}{4\pi r^3} (1 - \cos \phi^2) \quad (43.3)$$

Заметим, что данная функция имеет 3 экстремума (все горизонтальные принципиально неразличимы), из которых 2 это минимум, так что они являются устойчивыми и колебания будут около них. Так как замена знака у J приводит к смене направления, то ситуации $\cos \phi = 1$ и $\cos \phi = -1$ принципиально неразличимы, так что можем рассмотреть только одну, а именно $\phi = 0$. Для этого записываем выражение для магнитной индукции, создаваемой одним из диполей в точке второго:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}r^2}{r^5} \right) \quad (43.4)$$

(место для рисунка с диполями)

Обозначим вертикальную и горизонтальную составляющие магнитного диполя как μ_1 и μ_2 соответственно. Перепишем формулу для B :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2\mu_1 \vec{y} + \mu_2 \vec{x}}{r^3} \right) \quad (43.5)$$

Тогда момент действующий на шар:

$$\vec{M} = \vec{B} \times \vec{\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2\mu_1 \vec{y} + \mu_2 \vec{x}}{r^3} \right) \times (\mu_1 \vec{y} + \mu_2 \vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} \vec{z} \approx -\frac{4\pi \mu_0 J^2 R^3}{9} \phi \vec{z} \quad (43.6)$$

Далее переходим к механике происходящего. Так как диполь притягивается к плите, то колебания возможны только крутильные. Так как колебания малы, сила

трения всегда является силой трения покоя. Запишем второй закон ньютона относительно оси, проходящей через точку касания шара с плитой и перпендикулярной плоскости колебаний:

$$I \vec{\epsilon} = \vec{M} \tag{43.7}$$

Где момент инерции можно найти по теореме Штейнера

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 \tag{43.8}$$

Подставляя уравнение 43.6 получим

$$\ddot{\phi} = -\frac{20\pi\mu_0 J^2 R}{63m} \phi \tag{43.9}$$

Наконец получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{20\pi\mu_0 J^2 R}{63m}} \tag{43.10}$$

Содержание	Баллы
Определяет что теплообмена не происходит	1
Определяет что энтропия не меняется	2
Пишет все законы сохранения (без частичных баллов если написан только 1 или другой)	2
Находит конечную температуру	2
Пишет что энтропия функция состояния	3
Находит конечное изменение энтропии	2

Задача 44: Статистическая Термодинамика (Нурасыл Барлыбаев)

Пункт 1

Энергия диполя в электрическом поле

$$U = -(\vec{p}_0 \cdot \vec{E}) = -p_0 E \cos \theta,$$

где θ – угол между \vec{p}_0 и \vec{E} .

Доля диполей, ориентированных под углом θ в некотором направлении, находится из **распределения Больцмана**:

$$w(\theta) = A e^{-U/kT} = A \exp\left(\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}\right) \approx A \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT}\right).$$

(Здесь использовано приближение $e^x \approx 1 + x$ для малого параметра $x = \frac{p_0 E \cos \theta}{kT}$)

Вектор поляризации P – это среднее значение проекции дипольного момента на направление поля \vec{E} , умноженное на концентрацию n :

$$P = n \frac{\int_0^\pi (p_0 \cos \theta) \cdot w(\theta) \cdot (2\pi \sin \theta d\theta)}{\int_0^\pi w(\theta) \cdot (2\pi \sin \theta d\theta)}.$$

Учитывая, что в числителе член первого порядка по $\cos \theta$ обратится в ноль (т.к. $\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$) и необходимо брать следующий порядок разложения, а также используя линейное приближение в знаменателе, интегралы сводятся к:

$$P = n \frac{\int_0^\pi p_0^2 E/kT \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta} = \frac{np_0^2 E}{3kT}.$$

Связь между поляризацией P и диэлектрической проницаемостью ε в СИ: $P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E$. Отсюда:

$$\varepsilon - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{np_0^2 E/(3kT)}{\varepsilon_0 E} = \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT}.$$

Введем константу C так, что $C = \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 k}$. Тогда:

$$\varepsilon(T) = 1 + \frac{C}{T} \quad (1)$$

Из термодинамики диэлектрика плотность внутренней энергии U диэлектрика в электрическом поле E (в СИ) равна:

$$U = \left(\varepsilon + T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + U_0(T, \tau)$$

где U_0 – плотность внутренней энергии в отсутствие поля. Мы ищем изменение плотности внутренней энергии (ΔU) при включении поля E :

$$\Delta U = U - U_0 = \left(\varepsilon + T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (2)$$

Для подстановки в уравнение (2) нам нужно найти производную $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ из уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(1 + \frac{C}{T} \right) = 0 + C \cdot \frac{\partial}{\partial T} (T^{-1}) \\ &= -\frac{C}{T^2} \end{aligned}$$

Теперь найдем полный тепловой член:

$$T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = T \left(-\frac{C}{T^2} \right) = -\frac{C}{T} \quad (3)$$

Подставим выражения для ε (1) и $T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ (3) в формулу для ΔU (2):

$$\Delta U = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{C}{T} \right)}_{\varepsilon} + \underbrace{\left(-\frac{C}{T} \right)}_{T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}} \right) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

$$\Delta U = \left(1 + \frac{C}{T} - \frac{C}{T} \right) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Члены, содержащие C/T , взаимно уничтожаются:

$$\Delta U = (1) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

$$\Delta U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Чтобы найти полное изменение внутренней энергии:

$$\Delta U_{all} = \Delta U \cdot V = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot V$$

Пункт 2

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, \tau}$$

Вся дополнительная внутренняя энергия, которую система приобретает во время поляризации (из-за ориентации диполей), полностью зависит только от электрического поля. Следовательно, теплоемкость газа при постоянном объеме C_V **не изменится**.

Пункт 3

Диэлектрическая проницаемость ε для параэлектрика, подчиняющегося закону Кюри, связана с дипольным моментом p_0 следующим соотношением (СИ):

$$\varepsilon - 1 = \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$$

где:

- $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$
- $k \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}$
- $n = 10^{28} \text{ м}^{-3}$

Из формулы выразим квадрат дипольного момента p_0^2 через константу Кюри $C = T(\epsilon - 1)$:

$$p_0^2 = \frac{3\epsilon_0 k}{n} \cdot T(\epsilon - 1) = \frac{3\epsilon_0 k}{n} \cdot C$$

Таким образом, дипольный момент p_0 равен:

$$p_0 = \sqrt{\frac{3\epsilon_0 k \bar{C}}{n}} \quad (1)$$

где \bar{C} — среднее значение константы Кюри, определенное из экспериментальных данных.

Вычислим константу $C_i = T \cdot (\epsilon - 1)$ для каждой точки из таблицы.

Среднее значение константы \bar{C} :

$$\bar{C} = \frac{825.0 + 824.6 + 825.6 + 825.0 + 826.2}{5} = \frac{4126.4}{5} \approx 825.28$$

Подставим \bar{C} и константы в формулу (1):

$$p_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot (8.85 \times 10^{-12}) \cdot (1.38 \times 10^{-23}) \cdot 825.28}{10^{28}}}$$

Вычислим числитель:

$$3\epsilon_0 k \bar{C} \approx 3.024 \times 10^{-31}$$

Тогда:

$$p_0 = \sqrt{\frac{3.024 \times 10^{-31}}{10^{28}}} = \sqrt{3.024 \cdot 10^{-59}}$$

$$p_0 \approx 5.5 \times 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}$$

Содержание	Баллы
Энергия диполя	1
Использовано распределение Больцмана	1
Найдено выражение для диэлектрической проницаемости	3
Найдено изменение внутренней энергии	2
Сказано что теплоёмкость не изменится	3

Найдено выражение для дипольного момента	1
Посчитано численное значение	1

Задача 45: Гравитационные волны (*Амир Пшенбаев*)

Рассмотрим силы, действующие на одну из черных дыр. Если черные дыры находятся на расстоянии r друг от друга, то сила гравитационного взаимодействия равна

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (45.1)$$

Эта сила уравновешена центробежной силой

$$F_c = m_1\omega^2r_1, \quad (45.2)$$

где ω — угловая скорость вращения черных дыр, а r_1 — расстояние от центра масс системы до черной дыры m_1 . Расстояние r_1 определяется выражением

$$r_1 = \frac{m_2r}{m_1 + m_2}. \quad (45.3)$$

Приравнивая уравнения (52.1) и (52.2) и подставляя выражение (52.3), получаем, что

$$m_1 + m_2 = \frac{\omega^2r^3}{G}. \quad (45.4)$$

В момент слияния расстояние между дырами принимается равным

$$r = r_s = \frac{2G(m_1 + m_2)}{c^2}. \quad (45.5)$$

Подставив это выражение в (52.4), найдем сумму масс

$$m_1 + m_2 = \frac{c^3}{\sqrt{8G\omega}}. \quad (45.6)$$

Угловая скорость вращения связана с периодом обращения соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (45.7)$$

Из условия следует, что период обращения T связан с периодом гравитационной волны T_g как

$$T_g = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2T_g, \quad (45.8)$$

где T_g — период гравитационной волны, определяемый по графику. Объединив (52.6), (52.7) и (52.8), получаем

$$m_1 + m_2 = \frac{c^3T_g}{\sqrt{8\pi G}}. \quad (45.9)$$

Из приведенного в условии графика можно найти, что период гравитационной волны в области штриховой линии равен

$$T_g \approx 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ с.} \quad (45.10)$$

Учитывая, что $m_1 + m_2 = M$ (где M — масса образовавшейся черной дыры), подставим численное значение T_g в (52.9) и окончательно получим

$$M = \frac{c^3 T_g}{\sqrt{8\pi G}} \approx 3.9 \cdot 10^{32} \text{ кг.} \quad (45.11)$$

Содержание	Баллы
Правильно записана гравитационная сила	1
Правильно записана центробежная сила	1
Найдена приблизительная оценка периода гравитационной волны в диапазоне $[7, 10]$ мс.	1
Использовано равенство сил	1
Найдено выражение для суммы масс черных дыр	2
Получен ответ верного порядка, то есть $M \sim 10^{32}$	2

Четвертый тур. Младшая лига

Задача 46: Капитанская задача (Бекасыл Елубай)

Берліген сөздер келесі 4 санатқа бөлінеді:

1. Ақтөбе қаласындағы аудандар: 1, 2, 3, 4;
2. 12-ге еселі сандар: 12, 24, 36, 48;
3. Екі таңбалы жай сандар: 59, 23, 31, 89;
4. Ұйқаста қолданылатын сандар: 40, 99, 1045, 1800.

Задача 47: Vicking щииит! (Владимир Литвинов)

1. Средняя тяга

За один цикл гребца длительность цикла $T = t_1 + nt_2$. В момент толчка он даёт силу F , в момент возврата — ноль. Поэтому средняя (временная) сила от одного гребца:

$$\overline{F_{\text{гр}}} = F \cdot \frac{t_1}{T} = F \cdot \frac{t_1}{t_1 + nt_2}.$$

Если гребут n человек (в нашем случае максимально $N = 5$), то суммарная средняя тяга:

$$F_{\text{тяга}} = n \cdot \overline{F_{\text{гр}}} = nF \frac{t_1}{t_1 + nt_2}$$

2. Площадь погруженной поверхности

Площадь зависит от глубины погружения h , ребра погруженной части треугольника d :

$$S = 2l \cdot d = 2l \cdot \frac{h}{\cos(\alpha/2)} = 4hl$$

3. Архимед

Глубина погружения в зависимости от количества викингов определяется законом Архимеда:

$$(M + mn)g = \rho Vg$$

Найдем объем погруженной части, снова через два прямоугольных треугольника с углом $\frac{\pi}{3}$:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2}h^2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2) \cdot l = \sqrt{3}h^2l$$

Подставим:

$$\frac{M + mn}{\rho} = \sqrt{3}h^2l$$

Получим выражение для глубины погружения:

$$h = \sqrt{\frac{M + mn}{\sqrt{3}\rho l}}$$

И для площади поверхности:

$$S = 4hl = 4l\sqrt{\frac{M + mn}{\sqrt{3}\rho l}}$$

4. Условие стабильности

В установившемся режиме суммарная средняя тяга равна силе сопротивления:

$$F_{\text{тяги}} = NF \cdot \frac{t_1}{t_1 + nt_2} = F_r = a S v.$$

Отсюда скорость:

$$v = \frac{F_{\text{тяги}}}{a S^2} = \frac{nF \frac{t_1}{t_1 + nt_2}}{a S^2} = \frac{F}{a} \cdot \frac{n/(1+n)}{16l^2 \frac{M+mn}{\sqrt{3}\rho l}}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}\rho F}{16mal} \cdot \frac{n}{\left(\frac{M}{m} + n\right)(1+n)} = \frac{\sqrt{3}\rho F}{16mal} \cdot \frac{n}{(10+n)(1+n)}$$

5. Оптимальная викингизация дракара

Найдем оптимальную викингизацию – максимум функции:

$$v_{(n)} : n \in N; n \leq 5$$

В случае этой задачи проверить все числа на калькуляторе проще, чем вычислять производную. Численными методами получим:

$$v_{\max} = v_{(3)} = \frac{\sqrt{3}\rho F}{16mal} \cdot \frac{3}{(10+3)(1+3)} = \frac{\sqrt{3}\rho F}{16mal} \cdot \frac{3}{52} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1000 \cdot 52}{16 \cdot 80 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{64} \cdot 10} \cdot \frac{3}{52} = 5 \text{ m/s}$$

Содержание	Баллы
Средняя сила	1
Площадь погруженной поверхности	1
Закон Архимеда	1
Объем погруженной части	1
Найдена зависимость площади от количества викингов (есть перенос алгебраической и геометрической ошибки)	3
Уравнение баланса сил	3
Определено оптимальное количество викингов	1
Определена максимальная скорость	1

Задача 48: Спираль или лестница? (*Бекасыл Елубай*)

Тепло, переданное воде, равно мощности, выделяемой на нагрузке, умноженной на время:

$$Q = \frac{U^2}{R} t_1. \quad (48.1)$$

Из равенства тепла в обоих случаях получаем:

$$t_2 = t_1 \frac{R_2}{R_1}. \quad (48.2)$$

Сопротивление цилиндрического проводника равно

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (48.3)$$

Найдем длину одного витка спирали. Для этого мысленно раскрутим виток спирали и получаемая проволока является гипотенузой треугольника сторонами $2\pi R$, h . Отсюда, находим длину одного витка:

$$l_0 = \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2} \quad (48.4)$$

Если расстояние между контактами обозначим l_2 , что также является длиной спирали, то число витков равно l_2/h . Длина же изначальной проволоки равняется произведению длины одного витка на число витков:

$$l_1 = \frac{l_2}{h} \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}. \quad (48.5)$$

При параллельном соединении кучу проволок можно рассматривать как одну, соединенную вместе. Площадь данной проволоки будет равняться сумме площадей разрезанных проволок. Число проволок не что иное, как отношение изначальной длины к новой длине:

$$S_2 = S_1 \frac{l_1}{l_2}. \quad (48.6)$$

Объединяя все выражения, получаем:

$$t_2 = t_1 \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2} = t_1 \frac{h^2}{(2\pi R)^2 + h^2}. \quad (48.7)$$

Содержание	Баллы
Связывает время кипения с сопротивлениями	3
Находит длину одного витка	3
Выражает отношение длин проволок через радиус и шаг спирали	2
Находит отношение между площадями проволок	1.5
Выводит окончательное выражение	2.5

Задача 49: Жидкая темка (Қайнар Сұраған)

При подъеме из воды, сила которую надо прилагать кесе в произвольный момент равняется:

$$F = mg + \rho_w V_{in} g - \rho_w V_{un} g \quad (49.1)$$

, здесь V_{in} -объем воды, который находится внутри чаши и над уровнем воды. При поднятии кесе, данный объем поднимается вместе с ним. V_{un} - объем части кесе, который находится под водой. На нее действует сила Архимеда, который создает силу вверх.

Теперь выясним как меняется данная сила с увеличением высоты кесе на уровне воды. Максимальная сила будет когда нижний край кесе находится на уровне воды, то есть когда его почти вытащили и равняется он:

$$F_{max} = mg + \rho_w g \frac{2}{3} \pi R^3 \approx 23.0 \text{ Н} \quad (49.2)$$

Пренебрегая толщиной стенок, можем сказать, что минимальная сила будет в самом начале, когда кесе находится полностью под водой.

$$F_{min} = mg - \rho_w g \frac{2}{3} \pi ((R + h)^3 - R^3) \approx 1.2 \text{ Н} \quad (49.3)$$

Содержание	Баллы
Написана общее выражение для силы	4
Правильно выбран момент для максимальной силы и минимальной силы (по 1 за каждый)	2
Верно находит максимальную силу (при неправильном численном значении штраф 0.5 балл)	3

Верно находит минимальную силу (при неправильном численном значении штраф 0.5 балл)	3
---	---

Задача 50: Тайвань или Тайланд (*Владимир Литвинов*)

1. $P_{(U)}$. Динамический ЗСЭ для нашей схемы:

$$P_R + P_T = EI$$

Таким образом находим мощность на транзисторе:

$$P_T = EI - P_R I^2 = EkU - R_x(kU)^2 = P_{(U)}$$

Не следует забывать про ограничение тока сверху:

$$I = \max(kU, E/R)$$

2. *Средняя мощность*. Длина импульса равна четверти его периода, из чего мы можем заключить:

$$P_{cp} = \frac{P_{(0)} + 3P_{(E/2kR)}}{4} = \frac{E^2/2R - E^2/4R}{4} = \frac{E^2}{16R}$$

3. *Октава*. Хорошим шагом здесь является сложить импульсы в уме или на бумаге, графически или аналитически. Главное учесть, что для большинства импульсов ν_1, ν_2 :

$$P_{cp}(\nu_1) + P_{cp}(\nu_2) \neq P_{cp}(\nu_1 + \nu_2)$$

Усреднение при правильных диаграммах дает:

$$P_1 = \frac{E^2}{R} \cdot \frac{(1-1) + 0 + (1/2 - 1/4) + 0}{4} = \frac{E^2}{16R}$$

$$P_2 = \frac{E^2}{R} \cdot \frac{(1/2 - 1/4) + (1/2 - 1/4) + 0 + (1/2 - 1/4)}{4} = \frac{3E^2}{16R}$$

Для сложения сигналов период был разделен на четыре части, и для каждой найдено напряжение

4. *Power chord*. Здесь период придется делить на шесть частей (НОК частот поделенное на их НОД). Длительность сигнала в условии - как раз таки одна шестая наибольшего периода. Также, теперь начинает влиять ограничение тока $I = \max(kU, E/R)$. Получаем:

$$P_3 = \frac{E^2}{R} \cdot \frac{(1 - 1) + 0 + (1/2 - 1/4) + (1/2 + 1/4) + (1/2 - 1/4) + 0}{6} = \frac{3E^2}{24R} = \frac{E^2}{8R}$$

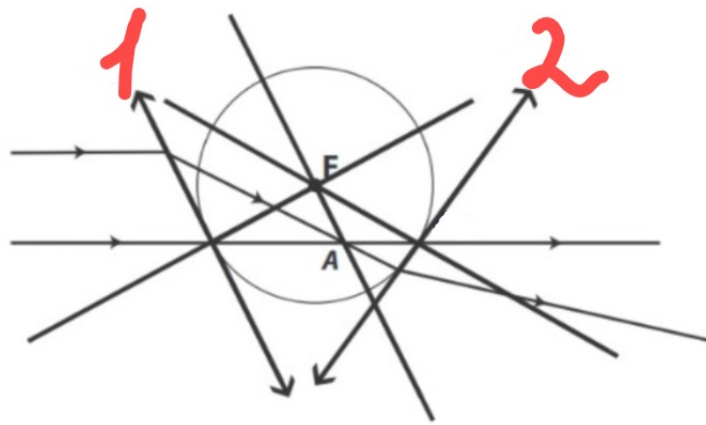
Если напряжение каждого сигнала из трех увеличится в два раза, ток будет постоянно ударяться в лимит:

$$P_4 = 0$$

Содержание	Баллы
Динамический ЗСЭ (1б), ограничение тока (1б)	2
Верные мощности фаз (2б), усреднение (1б)	3
Показан метод сложения (2б), мощности по 1б	4
Метод (2б), мощности (2б)	4

Задача 51: Оптический Бум! (Ален Ускембаев)

Построение основано на двух ключевых принципах оптики: луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется, а параллельные лучи после преломления собираются в фокусе.



Изначально параллельные лучи сходятся в фокальной плоскости после прохождения через линзу. Поскольку нижний луч проходит через оптический центр первой линзы O_1 , он не преломляется ею. Верхний луч после преломления также должен пройти через фокус F . Прямая, соединяющая O_1 и F , является главной оптической осью первой линзы. Сама линза 1 перпендикулярна этой оси и проходит через точку O_1 .

Так как линзы одинаковы и их фокусы находятся в одной и той же точке F , их фокусные расстояния должны быть равны. Это означает, что расстояние от оптического центра до фокуса для обеих линз одинаково: $|O_1F| = |O_2F|$.

Следовательно, оптический центр второй линзы O_2 можно найти как точку пересечения окружности с центром в точке F и радиусом, равным $|O_1F|$, с линией, по которой распространяется нижний луч. Зная положение центра O_2 и фокуса F , можно построить главную оптическую ось второй линзы (прямая O_2F) и саму линзу 2, которая будет ей перпендикулярна.

Содержание	Баллы
Находит центр первой линзы и ее главную оптическую ось	3
Правильно строит первую линзу	2
Использует условие равенства фокусных расстояний для нахождения центра второй линзы	4
Правильно строит вторую линзу и ее главную оптическую ось	3

Задача 52: Гравитационные волны (*Амир Пшенбаев*)

Рассмотрим силы, действующие на одну из черных дыр. Если черные дыры находятся на расстоянии r друг от друга, то сила гравитационного взаимодействия равна

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \tag{52.1}$$

Эта сила уравновешена центробежной силой

$$F_c = m_1\omega^2r_1, \tag{52.2}$$

где ω — угловая скорость вращения черных дыр, а r_1 — расстояние от центра масс системы до черной дыры m_1 . Расстояние r_1 определяется выражением

$$r_1 = \frac{m_2r}{m_1 + m_2}. \tag{52.3}$$

Приравнивая уравнения (52.1) и (52.2) и подставляя выражение (52.3), получаем, что

$$m_1 + m_2 = \frac{\omega^2r^3}{G}. \tag{52.4}$$

В момент слияния расстояние между дырами принимается равным

$$r = r_s = \frac{2G(m_1 + m_2)}{c^2}. \tag{52.5}$$

Подставив это выражение в (52.4), найдем сумму масс

$$m_1 + m_2 = \frac{c^3}{\sqrt{8G\omega}}. \tag{52.6}$$

Угловая скорость вращения связана с периодом обращения соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{52.7}$$

Из условия следует, что период обращения T связан с периодом гравитационной волны T_g как

$$T_g = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2T_g, \quad (52.8)$$

где T_g — период гравитационной волны, определяемый по графику. Объединив (52.6), (52.7) и (52.8), получаем

$$m_1 + m_2 = \frac{c^3 T_g}{\sqrt{8\pi G}}. \quad (52.9)$$

Из приведенного в условии графика можно найти, что период гравитационной волны в области штриховой линии равен

$$T_g \approx 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ с}. \quad (52.10)$$

Учитывая, что $m_1 + m_2 = M$ (где M — масса образовавшейся черной дыры), подставим численное значение T_g в (52.9) и окончательно получим

$$M = \frac{c^3 T_g}{\sqrt{8\pi G}} \approx 3.9 \cdot 10^{32} \text{ кг}. \quad (52.11)$$

Содержание	Баллы
Правильно записана гравитационная сила	1
Правильно записана центробежная сила	1
Найдена приблизительная оценка периода гравитационной волны в диапазоне $[7, 10]$ мс.	1
Использовано равенство сил	1
Найдено выражение для суммы масс черных дыр	2
Получен ответ верного порядка, то есть $M \sim 10^{32}$	2

Пятый тур. Старшая лига

Задача 53: Капитанская задача (Бекасыл Елубай)

Оператор цикла `while` означает, что до тех пор, пока выполняется некоторое условие — в данном случае, значение переменной n больше 29 — выполняется то, что заключено внутри фигурных скобок.

Первая итерация: $r = 0 + 34 = 34$ и $n = 32$

Вторая итерация: $r = 34 + 32 = 66$ и $n = 30$

Третья итерация: $r = 64 + 30 = 96$ и $n = 28$

После этого условие перестает выполняться, и программа выводит значение $r = 96$

Задача 54: Два проводящих шара в диэлектрике (Нурасыл Барлыбаев)

1. Чтобы найти ток, нужно установить связь между током утечки и текущим зарядом на шарах. Ток I , протекающий через замкнутую поверхность S , окружающую один из шаров, равен потоку вектора плотности тока \mathbf{j} :

$$I = \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме, $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — напряженность электрического поля.

$$I = \lambda \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

По теореме Гаусса поток вектора напряженности электрического поля равен $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon}$. Подставив это в выражение для тока, получаем фундаментальное соотношение (справедливое для любой геометрии в однородной среде):

$$I(t) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \epsilon} Q(t)$$

Ток — это скорость убывания заряда со временем (знак минус, так как заряд уменьшается):

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt}$$

Приравниваем два выражения для $I(t)$:

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \epsilon} Q$$

Разделяем переменные и интегрируем от $t = 0$ до t :

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon} dt \implies \ln \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon} t$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon} t}$$

Подставим $Q(t)$ обратно в формулу для тока:

$$I(t) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon} Q_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon} t}$$

По закону сохранения энергии, всё тепло, выделившееся при протекании тока (джоулево тепло), равно убыли энергии электрического поля системы. Поскольку в конце ($t \rightarrow \infty$) заряд равен нулю, вся начальная энергия перешла в тепло.

Энергия заряженной системы определяется через ёмкость C :

$$W_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Так как $d \gg R$, потенциал каждого шара определяется в основном его собственным зарядом (как у уединенного шара). Потенциал положительного шара: $\varphi_+ \approx \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ Потенциал отрицательного шара: $\varphi_- \approx \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ Разность потенциалов (напряжение) между шарами:

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

Ёмкость системы $C = \frac{Q_0}{U}$:

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

Расчет теплоты:

$$Q_{heat} = W_0 = \frac{Q_0^2}{2 \cdot (2\pi\varepsilon_0\varepsilon R)} = \frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

Это конденсатор (C) и резистор (R_{res}), соединенные параллельно.

- Конденсатор отвечает за накопление заряда (поле в диэлектрике).
- Резистор отвечает за проводимость (ток через среду).

Ёмкость C : Мы вычислили её во втором пункте.

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

Сопротивление R_{res} : Постоянная времени τ для RC-цепи равна $\tau = R_{res}C$. Из пункта 1 мы знаем, что показатель экспоненты равен $\frac{\lambda}{\varepsilon_0\varepsilon}$, значит постоянная времени релаксации заряда $\tau = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}$. Выразим сопротивление R_{res} :

$$R_{res} = \frac{\tau}{C} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon/\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = \frac{1}{2\pi\lambda R}$$

Содержание	Баллы
Дифференциальный закон Ома	2
Найден ток от времени	4
Найдено количество теплоты	2
Найдено время релаксации	2
Найдено сопротивление	2

Задача 55: Кривые трубы (Егор Кузнецов)

Так как в процессе колебаний движение происходит без проскальзывания, полная механическая энергия сохраняется:

$$T + W = \text{const.}$$

Так как колебания малые, для расчёта потенциальной энергии достаточно определить радиус кривизны большей трубы в нижней точке и считать, что эллипс колеблется в цилиндрической трубе такого же радиуса. Каноническое уравнение эллипса в сечении большей трубы имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Используя выражение для нахождения радиуса кривизны

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

можно показать, что радиус кривизны в окрестности нижней точки большей трубы $R = \frac{A^2}{B}$.

Рассмотрим небольшое отклонение меньшей трубы. Так как колебания малы, углы φ и θ довольно малы. Теорема косинусов для треугольника $OO'C$:

$$OC^2 = O'C^2 + O'O^2 + 2O'C \cdot O'O \cos(\theta + \varphi) \approx (O'C + O'O)^2.$$

Таким образом мы получили, что: $OC \approx (R - b) = \text{const}$ – центр меньшей трубы движется по дуге окружности радиуса $(R - b)$.

Примем за ноль потенциальной энергии горизонтальный уровень центра кривизны

нижней точки большей трубы (точка O), тогда потенциальная энергия трубы в произвольный момент времени равна:

$$W = -mg(R - b) \cos \theta \approx -mg(R - b) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right).$$

Так как труба двигается без проскальзывания, скорость центра масс и угловая скорость вращения относительно него связаны следующим образом:

$$\dot{\theta} = \frac{v_{c.m.}}{R - b}, \quad v_{c.m.} = \omega b.$$

Для нахождения кинетической энергии движения меньшей трубы воспользуемся теоремой Кёнига:

$$T = T_{c.m.} + T',$$

где $T_{c.m.}$ – кинетическая энергия движения центра масс, а T' – кинетическая энергия вращения меньшей трубы относительно центра масс, которые соответственно равны:

$$T_{c.m.} = \frac{mv_{c.m.}^2}{2}, \quad T' = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции этой трубы относительно оси, проходящей через её центр масс.

Рассмотрим тонкий круглый обруч. Относительно оси OZ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости обруча, момент инерции $I_z = \int R^2 m = mR^2$. С другой стороны его можно выразить через координаты x и y так $I_z = \int (x^2 + y^2) m$. Моменты инерции обруча относительно осей OX и OY равны между собой в силу симметрии и равны $I_x = \int x^2 m$, $I_y = \int y^2 m$ соответственно. Видно, что $I_z = I_x + I_y$, тогда находим моменты инерции обруча относительно осей OX и OY : $I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}$.

В силу симметрии эллипса, для него также справедливо $I_z = I_x + I_y$. Если рассмотреть тонкий обруч с радиусом a и сжать его вдоль оси OY до b , то мы получим желаемый эллипс с полуосями a и b , момент инерции относительно оси OY не изменится, так как мы сжимали его только вдоль этой оси и не меняли размеры обруча вдоль других осей, и будет равен $I_y = \frac{ma^2}{2}$. Аналогично рассмотрим тонкий обруч с радиусом b и растянем его вдоль оси OX до a , то момент инерции относительно этой же оси не изменится и будет равен $I_x = \frac{mb^2}{2}$. Тогда момент инерции относительно ось OZ равен $I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{2}$. Для трубы эллиптического сечения момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс будет таким же.

Подставляем в закон сохранения энергии известные величины и получаем уравнение гармонических колебаний, дифференцируя закон сохранения энергии по времени:

$$\ddot{\theta} + \frac{2b^2 g}{\left(\frac{A^2}{B} - b\right) (a^2 + 3b^2)} \theta = 0.$$

Отсюда находим период малых колебаний трубы:

$$T = \frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{2}{g} \left(\frac{A^2}{B} - b \right) (a^2 + 3b^2)}$$

Содержание	Баллы
Предложен энергетический метод.	1
Правильно найден радиус кривизны большего эллипса вблизи нижней точки.	2
Правильно определена траектория, по которой движется центр меньшей трубы.	2
Правильно найдена потенциальная энергия меньшей трубы.	1
Правильно найден момент инерции меньшей трубы относительно оси проходящей через центр масс/точку контакта труб.	2
Правильно вычислена кинетическая энергия меньшей трубы.	1
Правильно записан закон сохранения энергии с использованием приближений малых колебаний.	1
Получено верное уравнение колебаний.	1
Получен верный ответ.	1

Задача 56: Гонг (*Владимир Литвинов*)

1. Болт и сигма

Для того, чтобы найти σ , применим закон сохранения энергии для прогиба мембраны от болта, полагая, что она прогнется в сферический сегмент:

$$U_\sigma = \sigma S = \sigma \pi (a^2 + h_0^2) = m_0 g h$$

Отсюда:

$$\sigma = \frac{m_0 g h}{a^2 + h_0^2}$$

2. Гармонические колебания

Берем производную по времени в уравнении ЗСЭ, пренебрегая на этот раз силой тяжести:

$$U_\sigma + E_k = const$$

$$\dot{U}_\sigma + \dot{E}_K = 0$$

Так как колебания малые ($h \ll a$), E_K можно выразить следующим образом:

$$E_K = \dot{z}^2 \cdot m/2$$

$$z = \frac{h}{2} \cdot \frac{2a^2 + h^2}{3a^2 + h^2} \approx \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} = h/3$$

$$E_K = \left(\frac{\dot{h}}{3}\right)^2 \cdot \frac{m}{2} = (\dot{h})^2 \cdot m/18$$

Подставим:

$$\dot{E}_K + \dot{U}_\sigma = 2\dot{h}\ddot{h} \cdot m/18 + 2\sigma\pi h\dot{h} = 0$$

Сократим $2\dot{h}/18$

$$m\ddot{h} + 18\sigma\pi h = 0$$

Приведем в стандартный вид уравнения гармонических колебаний, решим:

$$\ddot{h} + \frac{18\sigma\pi}{m}h = \ddot{h} + \omega^2h = 0$$

$$\omega^2 = \frac{18\sigma\pi}{m} \implies \omega = \sqrt{\frac{18\sigma\pi}{m}}$$

Получаем:

$$\nu = \omega/2\pi = \sqrt{\frac{18\sigma\pi}{4\pi^2m}} = \sqrt{\frac{9\sigma}{2\pi m}}$$

Подставим $\sigma = \frac{m_0gh}{a^2+h_0^2}$:

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{2\pi m} \cdot \frac{m_0gh}{a^2+h_0^2}}$$

Содержание	Баллы
Предложена форма сферического сегмента	2
Правильно выражена энергия поверхностного натяжения	2
Правильный ЗСЭ для гвоздя	1
Найден коэфф. натяжения	1

Правильное выражение кинетической энергии	2
Получено уравнение колебаний/верный ЗСЭ продифференцирован	3
Найдена частота колебаний	1

Задача 57: Экзопланета (Нурасыл Барлыбаев)

Поверхность океана всегда принимает форму **экипотенциальной поверхности** (поверхность равного потенциала). Это значит, что сумма гравитационной и центробежной энергии на поверхности везде одинакова. Потенциал Φ в любой точке складывается из гравитации и вращения:

$$\Phi_{\text{гр}} = -\frac{GM}{r}$$

$$\Phi_{\text{цб}} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

(Где θ — угол отклонения от оси вращения: 0 на полюсе, 90° на экваторе).

Потенциал на поверхности океана на Полюсе $\Phi_{\text{пол}}$ должен быть равен потенциалу на поверхности океана на Экваторе $\Phi_{\text{эква}}$.

1. Вывод высоты горба

На Полюсе (расстояние $R + h_{\text{пол}}$, центробежной силы нет):

$$\Phi_{\text{пол}} = -\frac{GM}{R + h_{\text{пол}}}$$

На Экваторе (расстояние $R + h_{\text{эква}}$, центробежная сила максимальна):

$$\Phi_{\text{эква}} = -\frac{GM}{R + h_{\text{эква}}} - \frac{1}{2}\omega^2 (R + h_{\text{эква}})^2$$

Так как глубина океана мала по сравнению с радиусом ($h \ll R$), мы можем сделать упрощения. В слагаемом центробежной силы: $(R + h_{\text{эква}}) \approx R$. В гравитационном слагаемом разность потенциалов выражаем через g .

Приравниваем потенциалы ($\Phi_{\text{пол}} = \Phi_{\text{эква}}$) и переносим гравитационные члены влево:

$$-\frac{GM}{R + h_{\text{пол}}} = -\frac{GM}{R + h_{\text{эква}}} - \frac{1}{2}\omega^2 R^2$$

$$GM \left(\frac{1}{R + h_{\text{пол}}} - \frac{1}{R + h_{\text{эква}}} \right) = \frac{1}{2}\omega^2 R^2$$

Выражение в скобках приводим к общему знаменателю (с учетом $h \ll R$):

$$\frac{1}{R + h_{\text{пол}}} - \frac{1}{R + h_{\text{экв}}} \approx \frac{h_{\text{экв}} - h_{\text{пол}}}{R^2} = \frac{\Delta h}{R^2}$$

Получаем красивое уравнение (замечая, что $GM/R^2 = g$):

$$\frac{GM}{R^2} \Delta h = g \Delta h = \frac{1}{2} \omega^2 R^2$$

$$\Delta h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

$$\Delta h = \frac{3.14 \cdot 10^7}{2 \cdot 9.805} \approx 1\,599\,184 \text{ м}$$

Океан на экваторе выше (глубже), чем на полюсе, примерно на **1600 км!**

2. Парадокс давления

Теперь найдем давление на дне (на поверхности твердого ядра, где $r = R$).

Изначально может показаться, что на экваторе центробежная сила поднимает воду, уменьшая её вес, поэтому давление должно быть меньше. Но мы только что выяснили, что столб воды там на 1600 км выше! Кто победит: уменьшенная гравитация или огромная высота столба?

Для покоящейся жидкости справедливо:

$$P + \rho\Phi = \text{const}$$

Где P — давление, Φ — полный потенциал. Сравним давление на дне полюса $P_{\text{пол}}$ и дне экватора $P_{\text{экв}}$. Константа одна и та же для всего связанного океана.

$$P_{\text{пол}} + \rho\Phi_{\text{пол}}(R) = P_{\text{экв}} + \rho\Phi_{\text{экв}}(R)$$

Потенциалы на дне ($r = R$):

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{пол}}(R) &= -\frac{GM}{R} \\ \Phi_{\text{экв}}(R) &= -\frac{GM}{R} - \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \end{aligned}$$

Подставим в уравнение Бернулли:

$$P_{\text{пол}} - \rho\frac{GM}{R} = P_{\text{экв}} - \rho\frac{GM}{R} - \rho\frac{1}{2}\omega^2 R^2$$

Гравитационные члены сокращаются! Остается:

$$P_{\text{пол}} = P_{\text{экв}} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2$$

Или выразим разницу давлений:

$$P_{\text{экв}} - P_{\text{пол}} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2$$

$$\Delta P = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (3.14 \cdot 10^7)^2 \approx 1.57 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

В атмосферах (1 атм $\approx 10^5$ Па):

$$\Delta P \approx 157\,000 \text{ атм}$$

Давление на экваторе больше, чем на полюсе, на колоссальные **157 000 атмосфер**.

Содержание	Баллы
Идея об эквипотенциальности поверхности	3
Правильная разность высот	2
Уравнения для давления и потенциала	3
Правильные потенциалы на дне	2
Правильная разность давлений	2

Задача 58: 2 men 2 rucks (*Аргын Сейткамит*)

Чтобы клюшка оставалась в равновесии, суммарный момент сил относительно любой точки должен быть равен нулю. Для точек, где находятся правая и левая шайбы:

$$N_1(x_1 + x_2) = mgx_2 \tag{58.1}$$

$$N_2(x_1 + x_2) = mgx_1 \tag{58.2}$$

где N_1 и N_2 - силы реакции опоры левой и правой шайб соответственно, а x_1 и x_2 - расстояния от шайб до центра клюшки. Пусть сначала движется правая шайба, а левая стоит. Тогда равенство сил:

$$F_s = \mu_k N_2 \tag{58.3}$$

где $F_s \leq \mu_s N_1$ Правая шайба движется до тех пор, пока сила трения покоя от левой шайбы не достигнет максимума. Получаем условие для предельного расстояния:

$$\mu_k x_1 = \mu_s x_2 \tag{58.4}$$

$$x_2 = \frac{\mu_k}{\mu_s} x_1 \rightarrow x_{21} = \frac{\mu_k l}{\mu_s 2} \quad (58.5)$$

Работа, совершенная для данного перемещения:

$$A_0 = - \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{\mu_k l}{\mu_s 2}} \mu_k mg \frac{l/2}{l/2 + x_2} dx_2 = \mu_k mg \frac{l}{2} \ln \frac{2\mu_s}{\mu_k + \mu_s} \quad (58.6)$$

Теперь, следуя такой же логике, двигаем правую шайбу. Предельное расстояние для правой шайбы:

$$x'_1 = \left(\frac{\mu_k}{\mu_s}\right)^2 \frac{l}{2} \quad (58.7)$$

Работа, совершаемая при таком перемещении:

$$A_1 = - \int_{\frac{l}{2}}^{\left(\frac{\mu_k}{\mu_s}\right)^2 \frac{l}{2}} \mu_k mg \frac{\frac{\mu_k l}{\mu_s} / 2}{\frac{\mu_k l}{\mu_s} / 2 + x_2} dx_2 = \mu_k mg \frac{\mu_k l}{\mu_s 2} \ln \frac{\mu_s}{\mu_k} \quad (58.8)$$

Аналогичным образом считаются последующие работы. Заметим, что

$$A_{i+1} = \frac{\mu_k}{\mu_s} A_i \quad (58.9)$$

где $i > 0$.

Тогда получим сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии с $q = \frac{\mu_k}{\mu_s}$.

$$A = A_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{\mu_k}{\mu_s}} = \mu_k mg \frac{l}{2} \left(\ln \frac{2\mu_s}{\mu_s + \mu_k} + \frac{\mu_k}{\mu_s - \mu_k} \ln \frac{\mu_s}{\mu_k} \right) \quad (58.10)$$

Содержание	Баллы
Записано условие равновесия	2
Идея что шайбочки будут двигаться поочередно	1
Условие предельного расстояния	1
Работа для одного перемещения	2
Зависимость A_{i+1} от A_i	3
Геометрическая прогрессия	2
Ответ	1

Задача 59: Над ущельем (Егор Кузнецов)

А) Обозначим через q_1 заряд, которым обладала бы первая пластина, если бы она была заземлена, а через q_2 — заряд второй пластины. В силу малости щели можно считать, что система индуцированных зарядов q_1 и q_2 создает поле, эквивалентное полю заряда-изображения $-Q$ (см. рисунок). Зная это, найдем поток электрического поля через первую и вторую пластины.

Для произвольного угла φ первая пластина видна под углом $\pi - \varphi$, а вторая — под углом φ . Тогда поток через первую пластину равен:

$$\Phi_1 = - \left(\frac{\pi - \varphi}{2\pi} \right) \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot 2 = - \left(\frac{\pi - \varphi}{\pi} \right) \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

А поток через вторую пластину:

$$\Phi_2 = - \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right) \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot 2 = - \left(\frac{\varphi}{\pi} \right) \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Используя теорему Гаусса:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} &\rightarrow q_1 = - \left(\frac{\pi - \varphi}{\pi} \right) \cdot Q \\ \Phi_2 = \frac{q_2}{\varepsilon_0} &\rightarrow q_2 = - \left(\frac{\varphi}{\pi} \right) \cdot Q \end{aligned}$$

Чтобы найти распределение зарядов на незаряженных пластинах, воспользуемся принципом суперпозиции. Поле незаряженных пластин можно представить как суперпозицию полей заземленных пластин и однородно заряженных пластин, суммарный заряд которых равен нулю. Так как суммарный заряд заземленных пластин (индуцированный заряд) равен $-Q$, то для компенсации однородно заряженные пластины должны нести суммарный заряд $+Q$ (см. рисунок). В силу симметрии каждая из пластин должна обладать зарядом $Q/2$. Тогда заряд первой пластины равен:

$$Q_1 = q_1 + \frac{Q}{2} = \left(\frac{\pi - 2\varphi}{2\pi} \right) \cdot Q$$

Производная заряда по времени:

$$\dot{Q}_1 = - \frac{Q}{\pi} \cdot \dot{\varphi} = - \frac{Qv}{\pi R} = \text{const}$$

Знак минус означает, что заряд убывает, то есть ток течет от пластины 1 к пластине 2. Ток через амперметр равен:

$$I_A = \frac{Qv}{\pi R} = \text{const}$$

В) Найдем работу, необходимую для перемещения заряда из положения $\varphi = \pi/6$ в положение $\varphi = \pi/2$. Для этого рассмотрим изменение энергии взаимодействия заряда с заземленными пластинами и с однородно заряженными пластинами по отдельности.

Рассмотрим сначала случай, когда пластины заземлены. Запишем энергию системы в начальном положении (моделируя заряд как проводящий шарик радиусом $r \ll R$):

$$W_1 = \frac{1}{2}(-Q \cdot 0 + Q \cdot \varphi_1), \quad \text{где } \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{2R \cdot \sin \frac{\pi}{6}} + \frac{Q}{r} \right)$$

В конечном положении:

$$W_2 = \frac{1}{2}(-Q \cdot 0 + Q \cdot \varphi_2), \quad \text{где } \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{2R} + \frac{Q}{r} \right)$$

Тогда работа, совершаемая при перемещении заряда, равна:

$$W_2 - W_1 = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

Рассмотрим теперь работу сил поля однородно заряженных пластин. В силу однородности поля:

$$W'_2 - W'_1 = Q(\varphi'_2 - \varphi'_1) = -Q \cdot E \left(R - \frac{R}{2} \right) = -\frac{QR}{2} \cdot \frac{Q}{2S\epsilon_0} \approx 0 \quad (\text{т.к. } S \rightarrow \infty)$$

Тогда полная работа равна:

$$A = W_2 - W_1 + W'_2 - W'_1.$$

Окончательно:

$$A = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R}.$$

Содержание	Баллы
Использован метод изображений	1
Идея рассмотрения незаряженных пластин как суммы заземленных и однородно заряженных	1
Найден поток через 1-ю пластину	0.5
Найден поток через 2-ю пластину	0.5
Использование теоремы Гаусса для нахождения q_1 и q_2	1
Найден заряд одной из пластин Q_1 или Q_2	1
Найдено выражение для тока (-1, если неверное направление)	2
Энергия системы для заземленных пластин	1.5

Энергия системы для однородно заряженных пластин	1.5
Ответ для совершаемой работы	2

Пятый тур. Младшая лига

Задача 60: Капитанская задача (Бекасыл Елубай)

Оператор цикла `while` означает, что до тех пор, пока выполняется некоторое условие — в данном случае, значение переменной n больше 29 — выполняется то, что заключено внутри фигурных скобок.

Первая итерация: $r = 0 + 34 = 34$ и $n = 32$

Вторая итерация: $r = 34 + 32 = 66$ и $n = 30$

Третья итерация: $r = 64 + 30 = 96$ и $n = 28$

После этого условие перестает выполняться, и программа выводит значение $r = 96$

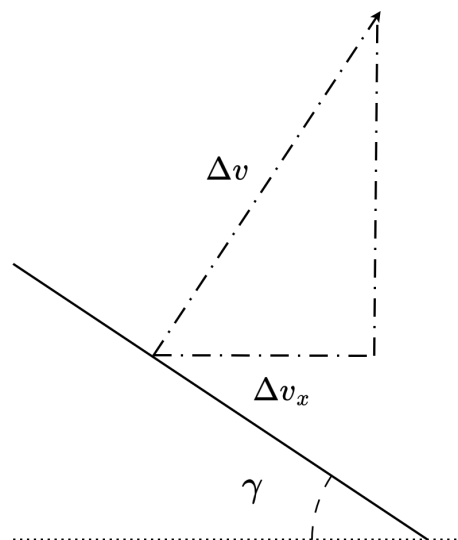
Задача 61: Глаза боятся... (Даниэль Тюлюбаев)

Ввиду осевой симметрии ракет, частицы воздуха, сталкивающиеся с ней, имеют одинаковый угол (для ракеты B — один угол при столкновении с первой ступенью и другой при столкновении с второй) и скорость столкновения. Поэтому можно вычислить эффект только от одного столкновения и суммировать вектора действующих сил со стороны всех частиц.

Так как столкновение неупругое и сила действует только по нормали к стенкам ракеты — трения нет — а масса ракеты значительно превосходит массу частицы, частица приобретает скорость в направлении нормали, равную скорости ракеты в проекции на эту нормаль. Угол наклона стенки ракеты к горизонту обозначим γ

$$\Delta v = v \sin \gamma \quad (61.1)$$

За время Δt с ракетой сталкивается масса воздуха $\Delta m = \rho v S \Delta t$, где S — площадь поперечного сечения ракеты (ступени). Суммарное изменение импульса ракеты за это время $\Delta p_{\text{ракеты}} = \Delta m \Delta v_x$, где $\Delta v_x = \Delta v \sin \gamma$ — изменение скоростей частиц по направлению движения ракеты, так как составляющие импульсов, перпендикулярные движению, взаимно уничтожаются.



$$\Delta p_{\text{ракеты}} = \rho S v^2 \sin^2 \gamma \Delta t \quad (61.2)$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$F = \frac{\Delta p_{\text{ракеты}}}{\Delta t} = \rho S v^2 \sin^2 \gamma \quad (61.3)$$

Для ракеты A применяем формулу для силы напрямую, а для ракеты B складываем силы, действующие на каждую ступень, с учетом того, что площадь второй ступени равна $\frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2)$.

$$F_A = \frac{1}{4}\pi\rho v^2 d^2 \sin^2 20^\circ \quad (61.4)$$

$$F_B = \frac{1}{4}\pi\rho v^2 (d^2 \sin^2 30^\circ + (D^2 - d^2) \sin^2 20^\circ) \quad (61.5)$$

Из этого находим искомое соотношение:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{d^2 \sin^2 20^\circ}{d^2 \sin^2 30^\circ + (D^2 - d^2) \sin^2 20^\circ} = 0.36 \quad (61.6)$$

Содержание	Баллы
$\Delta m = \rho v S \Delta t$	1
$\Delta v_n = v \sin \gamma$	2
$\Delta p_{\text{ракеты}} = \Delta m \Delta v \sin \gamma$	2.5
$F = \Delta p_{\text{ракеты}} / \Delta t$	1
$F_A \propto d^2 \sin^2 20^\circ$	1.5
$F_B \propto d^2 \sin^2 30^\circ + (D^2 - d^2) \sin^2 20^\circ$	3
$F_A / F_B = 0.36$	1

Примечание: участник может писать $\Delta p_{\text{частиц}}$ или просто Δp ; также, в решении подразумевается, что мы берем модуль изменения импульса, но можно делать как угодно — на ответ это не влияет.

Примечание: если участник использует “=” вместо “ \propto ” для сил, то баллы следует засчитывать при условии, что полученное равенство подразумевает правильную пропорциональность в отношении S и $\sin \gamma$ даже если оно имеет мелкие недочеты при выводе; если же такая пропорциональность получилась из физически неверных рассуждений, пункты за силы не засчитываются.

Задача 62: Трубочка вертушечка (Ален Ускембаев)

Задача решается через закон сохранения энергии и анализ периодического движения.

Трубка является физическим маятником (стержень, вращающийся вокруг конца). Ее момент инерции $I = \frac{1}{3}ML^2$, расстояние от оси до центра масс $d = L/2$. Период

малых колебаний:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

По условию, толчки происходят в такт с этим периодом.

Каждая порция воды массой Δm , вылетая со скоростью v , сообщает трубке дополнительную кинетическую энергию, равную работе реактивной силы. Эта энергия равна:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta mv^2$$

Чтобы трубка достигла горизонтального положения, ее центр масс должен подняться на высоту $h = L/2$. Необходимая для этого потенциальная энергия:

$$E_{\text{цель}} = Mgh = Mg\frac{L}{2}$$

Чтобы накопить нужную энергию, потребуется N импульсов, где $N \cdot \Delta E \geq E_{\text{цель}}$.

$$N \cdot \frac{1}{2}\Delta mv^2 \geq Mg\frac{L}{2} \implies N \geq \frac{MgL}{\Delta mv^2}$$

Минимальное целое число импульсов:

$$N = \left\lceil \frac{MgL}{\Delta mv^2} \right\rceil$$

где $\lceil \dots \rceil$ — округление до ближайшего целого числа вверх.

Первый импульс происходит в $t = 0$. Каждый следующий импульс происходит через половину периода $T_0/2$, когда трубка возвращается в нижнюю точку. Время до N -го импульса:

$$t_N = (N - 1) \cdot \frac{T_0}{2}$$

После получения N -го импульса у трубки будет достаточно энергии для подъема. Подъем из нижнего положения до крайнего занимает четверть периода $T_0/4$. Итоговое время:

$$t_{\text{финал}} = t_N + \frac{T_0}{4} = (N - 1)\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{4} = \left(\frac{2N - 1}{4}\right)T_0$$

Содержание	Баллы
Правильно идентифицирована физическая модель (физический маятник).	2
Корректно вычислена формула для периода колебаний трубки T_0 .	2
Верно определена порция энергии ΔE , добавляемая каждым импульсом.	2
Правильно рассчитана целевая энергия $E_{\text{цель}}$ для достижения цели.	2
Составлено неравенство и найдено минимальное число импульсов N .	2
Логически верно составлена формула для общего времени на основе N и T_0 .	2

Задача 63: спешка. (Роман Черемнов, Азамат Аймуратов)

Задача требует построить много графиков Запишем тепловой баланс

$$cm\Delta T = Pt \tag{63.1}$$

Теперь высоту от времени

$$h = h_0 + vt \tag{63.2}$$

$$\Delta h = vt \tag{63.3}$$

$$cm\Delta T = P \frac{\Delta h}{v} \tag{63.4}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx 0.01 \frac{\text{км}}{^\circ\text{C}} \tag{63.5}$$

Вместо построения воспользуемся таблицей для простоты проверки

км	$^\circ\text{C}$	$\frac{\text{км}}{^\circ\text{C}}$
0	100	
1	97	0.3
2	93	0.3
3	90	0.3
4	85	0.2
5.5	80	0.1
7	75	0.5
10	65	0.3

12	55	0.2
----	----	-----

Отсюда получаем

$$H_{\text{кип}} \approx 4.75 \text{ км} \tag{63.6}$$

$$t = 47.5 \text{ мин} \tag{63.7}$$

Содержание	Баллы
Связывает высоту и время	1
Связывает температуру воды и время	2
Выражает температуру как функцию давления	2
Строит график температуры воды от давления на графике температуры кипения	3
Находит точку пересечения	2
Находит время	2

Задача 64: Технолоджия (*Аргын Сейтками*)

Найдем температуру окружающей среды. Тепло, выделенное на резисторе за время τ :

$$\frac{U^2}{r} \tau = cm(t_c - t_{air}) \tag{64.1}$$

Получим

$$t_{air} = t_c - \frac{U^2 \tau}{cmr} \tag{64.2}$$

Из закона теплопроводности, мощность тепловых потерь в окружающую среду пропорциональна разности температур. То есть,

$$P_{loss} = \alpha(t - t_{air}) \tag{64.3}$$

Для первого испытания:

$$P_{resistor} = \frac{U^2 r}{(R_1 + r)^2} \tag{64.4}$$

$$P_{loss} = P_{resistor} \Rightarrow \alpha(t_1 - t_{air}) = \frac{U^2 r}{(R_1 + r)^2} \tag{64.5}$$

Выражаем α

$$\alpha = \frac{U^2 r}{(R_1 + r)^2 (t_1 - t_c + \frac{U^2 \tau}{cmr})} \tag{64.6}$$

Для размыкания цепи $t = t_c$

$$\alpha(t_c - t_{air}) = \frac{U^2 r}{(R_x + r)^2} \tag{64.7}$$

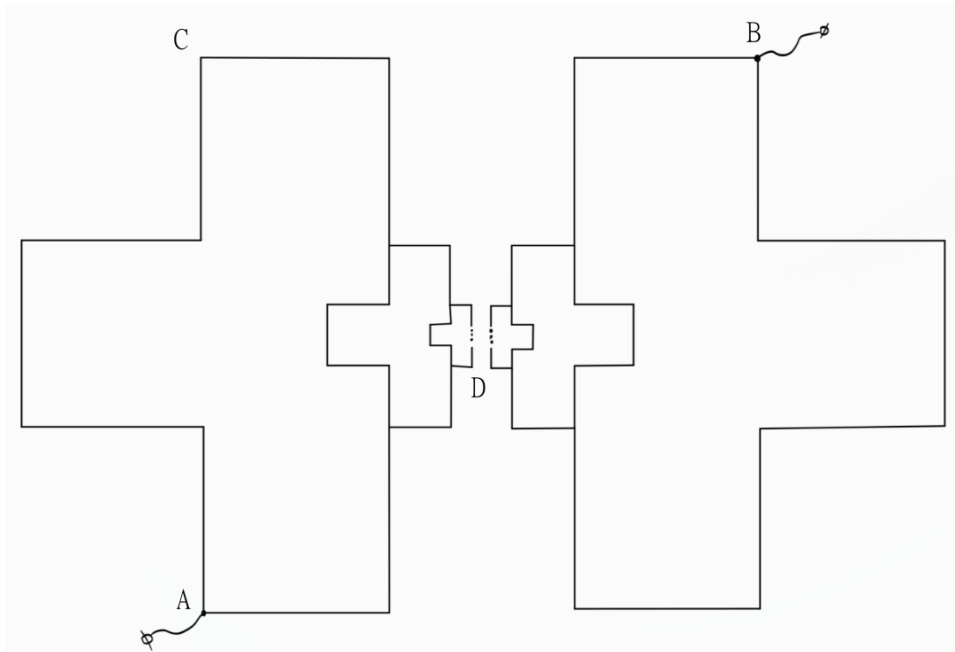
$$\frac{U^4 \tau}{cm(R_1 + r)^2(t_1 - t_c + \frac{U^2 \tau}{cmr})} = \frac{U^2 r}{(R_x + r)^2} \quad (64.8)$$

Окончательно:

$$R_x = (R_1 + r) \sqrt{1 + \frac{cmr(t_1 - t_c)}{U^2 \tau}} - r \quad (64.9)$$

Содержание	Баллы
Найдена температура окружающей среды	3
Найдены потери тепла	2
Найден α	2
Записано уравнение для размыкающейся цепи	3
Получен ответ	2

Задача 65: **Закоротить принтеры** (Адриан Ревковский, Роман Черемнов)



Для решения исходной задачи найдём 2 вспомогательных сопротивления, а именно сопротивление R_1 между A и C , R_2 между A и D . Заметим, что точка D играет ключевую роль в данной задаче, поэтому стоит понять, что фрактал, заданный данным рисунком, предполагает наличие общего контакта между квадратами, которое мы и обозначим D . R_1 вычисляется традиционным способом: добавление одного элемента. Получается следующее уравнение:

$$R_1 = \frac{5r \cdot (4r + R_1/3)}{9r + R_1/3} \rightarrow R_1^2 + 22R_1r - 60r^2 = 0 \rightarrow R_1 = (\sqrt{181} - 11)r \quad (65.1)$$

Для нахождения R_2 заметим, что из-за наличия контакта в D вторая часть цепи не влияет на него. Далее представим цепь между A, C, D как треугольник, такой

что $R_{AC} = 5r, R_{AD} = R_{CD} = R_{22}$. Из первой части решения знаем, что:

$$\left(\sqrt{181} - 11\right) r = R_1 = \frac{5r \cdot 2R_{22}}{5r + 2R_{22}} \rightarrow R_{22} = \frac{5}{26} \left(1 + \sqrt{181}\right) r \quad (65.2)$$

Далее найти решение несложно:

$$R = 2 \frac{(5r + R_2)R_2}{5r + 2R_2} = \frac{r}{26} \frac{(27 + \sqrt{181})(1 + \sqrt{181})}{14 + \sqrt{181}} \quad (65.3)$$

Ключевые пункты	Баллы
Указание наличия и использование точки D	2
Сопротивление R_1 между A и C	4
Сопротивление R_2 между A и D	4
Ответ	2
Иной метод расчёта с теми же идеями	12

Задача 66: Мысли о гипершаре (*Адриан Ревковский*)

Заметим, что энергия – аддитивная величина, а следовательно, определенный через неё потенциал также. Это значит, что потенциал системы, состоящей из нескольких частей, равен сумме потенциалов этих частей в отсутствии других.

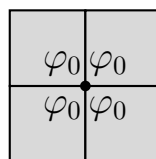
Также вспомним выражение для потенциальной энергии:

$$W/m \propto \frac{M}{a} \quad (66.1)$$

где M – масса тела, a – его линейный размер.

Пункт 1

Воспользуемся первым фактом и сложим 4 квадрата вместе так, чтобы они образовали один квадрат $2l \times 2l$ (рис.1). Тогда потенциал точки в центре квадрата, которая является к тому же вершиной каждого треугольника, будет 4φ . Однако изменились линейные размеры(в 2 раза) и масса (в 4 раза), а значит, чтобы найти потенциал исходного, нужно воспользоваться методами подобия и формулой для энергии:

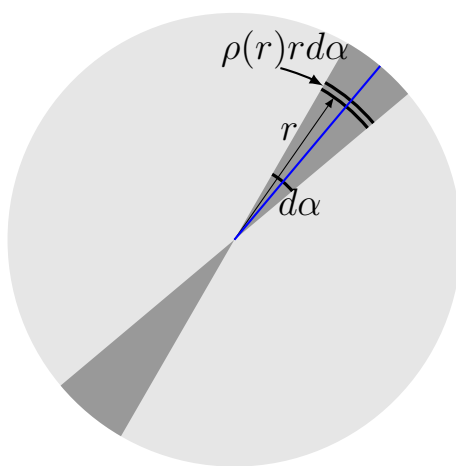


$$\frac{\varphi_x}{m_x/a_x} = \frac{\varphi_y}{m_y/a_y} \quad (66.2)$$

Из чего несложно показать, что: $\varphi_1 = 2\varphi_0$

Пункт 2

Вспомним, что цилиндр является фигурой вращения и, более того, цилиндр из этого пункта можно получить вращением исходного квадрата вокруг одной из сторон. К тому же данный поворот переводит его вершину в центр основания цилиндра. Однако при таком повороте масса распределяется неравномерно. Покажем, что это происходит по закону $\rho(r)$, в целях это сделать приведём рисунок (рис.2). Заметим, что $\rho(r)r d\alpha = \rho_0 d\alpha$. То есть при такой плотности масса распределена равномерно по длине для тонкого элемента. Разделив цилиндр на много таких участков, получим разделение на квадраты равные исходным!



Составляя такую же пропорцию как в первом пункте получим:

$$\frac{\varphi_0}{m/l} = \frac{d\varphi_2}{\rho_0 l d\alpha} \rightarrow d\varphi = \varphi_0 \frac{\rho_0 l^2}{m} \rightarrow \varphi_2 = \varphi_0 \frac{2\pi \rho_0 l^2}{m} = \varphi_0 \tag{66.3}$$

Содержание	Баллы
Ключевые пункты	Баллы
Идея аддитивности потенциалов	1
Выражение для потенциальной энергии	1
Идея сложить 4 квадрата вместе	1
Связь между "большим" и "маленьким" квадратами	1
Ответ на 1 пункт	1
Идея поворота исходного квадрата	2
Показано, что при вращении квадрата возникает подобное $\rho(r)$	1
Ответ на 2 пункт	2

Благодарности

Этот турнир — результат колоссальной работы огромного количества людей, без которых ничего бы не получилось. Здесь мы хотим выразить глубочайшее признание всем тем, что вложил в этот проект бесчисленные часы своего личного времени и помог развитию не только *Almaty Physics Battles*, но и всего олимпиадного сообщества Казахстана.

Спонсоры



Академический комитет

- Черемнов Роман — председатель академического комитета APhB, бронзовый призёр APhO 2025, серебряный призёр EuPhO 2025, золотой призёр IZhO 2025, дважды золотой призёр Республиканской олимпиады по физике 2025 и 2024.
- Аппас Абылай — главный переводчик APhB 2025, серебряный призёр Республиканской олимпиады по физике, бронзовый медалист Международной Жаутыковской олимпиады.
- Тюлюбаев Даниэль — спаситель первого и второго туров APhB 2025, бронзовый призёр IJSO, APhO, EuPhO и IPhO, серебрянный медалист Международной Жаутыковской олимпиады.
- Литвинов Владимир — составитель APhB 2025 и жюри APhB 2024, золото Республиканской 2022 и 2023, студент Ecole Polytechnique de Paris.
- Пшенбаев Амир — составитель APhB 2025, серебро (2024) и бронза (2025) IPhO, бронза (2024) и серебро (2025) APhO, бронза (2023) и золото (2024, 2025) IZhO, серебро (2022) и золото (2023, 2024, 2025) Республиканской олимпиады по физике, составитель экзаменов Декабрьских сборов по физике (2025), составитель задач Astana Physics Battles 2023, 2024, 2025, студент Imperial College London.
- Бекасыл Елубай — составитель APhB 2025, серебро IPhO (2025), бронза APhO (2024, 2025), серебро (2024) и золото (2025) IZhO, серебро (2024) и золото (2023,

- 2025) Республиканской олимпиады по физике, составитель экзаменов Декабрьских сборов по физике (2025), член жюри Astana Physics Battles 2023, 2024, студент NU.
- Нурасыл Барлыбаев — составитель APhB 2025, похвальная грамота APhO (2024), бронза EuPhO (2024), серебро (2024) и бронза (2025) IZhO, бронза (2022) золото (2023) бронза (2024) серебро (2025) Республиканской олимпиады по физике, студент NU.
 - Адриан Ревковский — составитель APhB 2025, Золото Open Belarusian Physics Olympiad (2022), Абсолютный победитель Белорусской Республиканской олимпиады (2023-2025), Серебро IPhO (2025), Золото ISPhO (2025).
 - Санжар Бисенали — составитель APhB 2025, студент Caltech, IChO: золотая медаль и серебряная медаль, IMChO: серебряная медаль, PO по химии: золотая медаль (2022, 2023).
 - Қайнар Сұраған — абсолютный победитель Республиканской олимпиады по физике (2022), серебряный призер Республиканской олимпиады по физике (2023), серебряный призер Республиканской юниорской олимпиады (2019), победитель олимпиад ҚБО (2022), участник IZhO (2022, 2023), студент Nazarbayev University
 - Амирбек Азатбеков — составитель и жюри APhB 2025, член национальной сборной Казахстана по физике (2025), Серебряный медалист IPhO (Франция, Париж), Серебрянный медалист APhO (Саудовская Аравия, Дахран), Бронзовый и золотой медалист IZhO (2024, 2025), Серебрянный медалист APhB 2023.
 - Ален Ускембаев — составитель задачи APhB 2025, похвальная грамота республики 2025, Золото APhB 2023, со-организатор весенней олимпиады на базе Тамоса (2025), 2 место КБО(2025), участник и призер конкурса республиканских проектов (2025), обладатель гранта ЗФТШ при МФТИ(2024).
 - Курман Дамир — составитель и жюри APhB 2025, золотой и серебрянный медалист Республиканской олимпиады по физике, абсолют 4 на декабрьских УТС 2025.
 - Қазымбек Илияс — составитель и жюри APhB 2025, золотой медалист европейской олимпиады и бронзовый медалист международной олимпиады по физике.
 - Таңат Әміржан Ерғалиұлы — жюри APhB 2025, учитель физики в НИШ Караганда.

- Ерлан Керімбай — жюри APhB 2025, учитель физики IB МҮР, координатор STEAM и робототехники в Международной школе Мирас, разработчик AI-тренингов для педагогов, куратор команд по робототехнике.
- Светлана Лемешко — жюри APhB 2025, учитель физики БОУ города Омска Лицей №64, почетный работник образования Российской Федерации, призер Всероссийской олимпиады для учителей по физике "Профи"2024 года, лауреат Всероссийской олимпиады для учителей физики "Лига лучших"2025 года.
- Дрожжин Илья — составитель и жюри APhB 2025, студент МГУ, трижды победитель всероссийской олимпиады по астрономии, призер всероссийской олимпиады по физике.
- Нурмагамбетов Алдияр — жюри APhB 2025, студент факультета ядерной физики Алматинского Филиала НИЯУ МИФИ.
- Кузнецов Егор — составитель и жюри APhB 2025, студент МФТИ, победитель Московской Олимпиады Школьников, тренер олимпиадных групп в СУНЦ МГУ, автор задач и член жюри МОШ, спаситель распечаток 5го тура APhB 2025.
- Асхат Алдияр — жюри APhB 2025, студент университета Нархоз, победитель городских этапов и бронзовый призер республиканской Олимпиады, дважды серебряный призер Қазақстан Білім Олимпиадасы.
- Мухамедиев Аянали — жюри APhB 2025, студент КазНУ им. Аль Фараби. Призер республиканских и областных олимпиад. Жюри АФБ уже в третий раз.
- Сейткамит Аргын — составитель и жюри APhB 2025, двукратный золотой медалист Республиканской олимпиады по физике.
- Егенбергенова Нургул — жюри APhB 2025, золотая медалистка Международной Жаутыковской олимпиады, бронзовая призёрша Международной олимпиады по физике.
- Ташмуханбет Бекарыс — жюри APhB 2025, серебряный медалист IESO, золотой медалист республиканской олимпиады по наукам о земле, золотой медалист Қазақстан білім олимпиадасы по физике.
- Аймуратов Азамат — составитель и жюри APhB 2025, бронзовый медалист Международной олимпиады по астрономии и астрофизике, бронзовый медалист Республиканской олимпиады по физике, золотой медалист республиканской олимпиады по астрофизике.

- Динмухаммед Жамбыл — жюри APhV 2025, студент ФЭЧиКАлматинского Филиала НИЯУ МИФИ, член жюри IZhO (2024), член жюри APhV 2024.
- Еспан Диас — жюри APhV 2025, двухкратный бронзовый медалист Международной Жаутыковской олимпиады, золотой призер Республиканской олимпиады по физике и Қазақстан білім олимпиадасы.

Специальные благодарности

Отдельную благодарность выражаем Алишеру Еркебаеву и Ернуру Қайроллаеву за предоставление шаблона в Overleaf для оформления туров и финального сборника, за помощь в редакции правил и регламента.

Выражаем благодарность Нурлыбаевой Анаре Анваровне, Ахметжанову Улару Сырымбетовичу, Емберген Мағжану Мазимбаевичу, Көптілеуову Қанату Қасымұлы и всему персоналу Baiterek School of Science and Technology за предоставление площадки и спонсорства для турнира, а также за помощь в организации.



Ждём вас на следующем турнире!